بازنگری پویا در سیاست کنترل انبار (s,S)

حسن صالحی فتح‌آبادی
گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشکده علوم دانشگاه تهران، تهران، ایران

چکیده

در روش کلاسیک (s,S,T) کنترل انبار اوقات بازنگری منظم و هر T واحد زمان یک بار می‌باشد. در روشهای جدیدتر، طول دوره‌های اول و دوم بازنگری متفاوت از طول دوره‌های بعدی گرفته می‌شود. در همهٔ این روشها، فاصلهٔ بازنگری مستقل از سطح انبار تعیین می‌گردد. اما مقدار سطح انبار اثر اقتصادی زیادی بر طول فواصل دارد. لذا، در این مقاله به ساخت مدل ریاضی روشی نو می‌پردازیم که در آن فواصل بازنگری وابسته به سطح انباراند. در این روش، طول هر دورهٔ بازنگری متناسب با i، سطح بازنگری شده انبار، i، به صورت $\xi(i)$ در نظر گرفته می‌شود که باید با توجه به مخارج سالیانهٔ سیستم بهینه گردد.

J. Sci. Univ. Tehran, Vol ***22*** *, no 1 (1996), PP.37-42*

Dynamic Review Periods In The (s,S) Inventory Control Policy

H. Salehi - Fathabadi

Dept. of Mathematics and Computer Science, University of Tehran, Tehran, Iran

Abstract

In all the ineventory control policies introduced so far, the review periods are taken to be constant and independent from the inventory level. In the classical (s,S,T) policy the length of all periods is constant and equal to T time units. Recent methods takes the

duration of the first period different from the others, but steel a constant.

Obviously, the inventory level has a direct economical effect on the periods length. This paper describes a new control method of inventory systems in which the length of the review periods are calculated as a function of the inventory level. If the level at the begining of a period is i, the period's length is taken to be $\xi(i)$. Then by this method, the annual cost for given s and S becomes a funnction of $\xi(i)$, which is minimized with respect to ξ. The result is the optimal value of $\xi(i)$, namely $\xi^*(i)$, for any

۱ – مقدمه

در روش (s,S,T) [2,3,6] امر مهم و اصلی تشخیص لحظه زمانی گذر سطح انبار از سطح سفارش است. هدف یک بازنگری، با وجود همه مخارج‌اش، رسیدگی به این امر است. چنانچه این لحظه رسیده باشد سفارش تدارک کالا داده می‌شود. در غیر اینصورت بازنگری انجام شده هیچ اثر و نتیجه‌ای نخواهد داشت. شک نیست که تحمل مخارج بازنگری بدون هیچگونه نتیجه قابل قبول نیست. در روشهای (s,S,u_1) و (s,S,u_2) به مطلب توجه بیشتری شده [4,5] و نظر به اینکه سطح انبار در ابتدای دورهٔ سیستم انبار دارای حداکثر مقدار یعنی S است، در u_1 ، اولین دورهٔ بازنگری T_1 و در u_2 اولین و دومین دوره به ترتیب T_1 و T_2 گرفته می‌شود و همهٔ دوره‌های بعدی برابر T. در هر دو روش اخیر، مقادیر T_1 و T_2 بدون به‌کارگیری مستقیم مقدار سطح انبار بازنگری شده به‌گونه‌ای تعیین می‌گردند که هزینهٔ سالیانهٔ سیستم به حداقل برسد.

در صورتی که به سطح انبار بازنگری شده به عنوان یک عامل مؤثر در طول دوره‌های بازنگری توجه نماییم، آنگاه لازم است طول هر دوره تابع مشخصی از سطح مذکور باشد. این تابع را وقتی مقدار سطح انبار در زمان بازنگری i باشد، $\xi(i)$ می‌نامیم. بدیهی است در صورتی که مقدار بهینهٔ این تابع، $\xi^*(i)$ در تعیین هزینهٔ سالیانه مورد عمل قرار گیرد، به شرط بهینه بودن متغیرهای تصمیم S,s ، این هزینه حداقل مقدار خود را خواهد داشت. در عمل وقتی که i مشخص گردید، آنگاه با استفاده از $\xi^*(i)$ زمان بازنگری بعدی تعیین خواهد شد. به این طریق اوقات (فواصل) بازنگری به صورت پویا محاسبه می‌گردند و به همین لحاظ این روش را ***بازنگری پویا*** می‌نامیم.

در بخش ۲ مدل هزینهٔ سالیانهٔ سیستم با روش بازنگری پویا در حالت کلی ساخته می‌شود و در بخش ۳ به بررسی حالتی که تقاضا دارای توزیع پواسون می‌باشد پرداخته و نتیجهٔ کاربرد این روش را با روشهای دیگر مقایسه خواهیم کرد.

۲ – هزینهٔ سالیانه

فرض می‌کنیم فرآیند تقاضا تصادفی بوده و فاصلهٔ زمانی بین هر دو تقاضای متوالی، y ، دارای تابع چگالی

احتمال f(y)، y > o می‌باشد. حجم تقاضا را در مدت زمان t، متناسب با f(y)، X_t می‌نامیم و تابع احتمال آنرا p(x;t). میانگین این حجم تقاضا برابر است با

$$\mu_t = \sum_{x=0}^{\infty} xp\,(x,t)$$

همچنین فرض می‌کنیم تقاضاها در فواصل زمانی مجزا مستقل از یکدیگرند. اگر $u=(u_1, u_2,\ldots)$ لحظات بازنگری در یک دورهٔ دلخواه سیستم باشند، آنگاه با فرض معلوم بودن تابع $\zeta(i)$ بازاء مقادیر s، s+1 ، s+2، ...S

$$u_1 = \zeta(s)$$

$$U_r = U_{r-1} + \zeta(I_{r-1})\ ,\ r=1,2,3,..$$

که I_{r-1} سطح موجودی انبار در (r-1) امین بازنگری بوده و دارای مقادیر ممکن s ، s+1 ، ...S است. اگر در r امین بازنگری مقدار I_r برابر i>s مشاهده شود، آنگاه طول دورهٔ بعدی بازنگری برابر $T_i = \zeta(i)$ و لذا

$$u_{r+1} = u_r + T_i \quad (۱)$$

است.

متوسط مخارج سیستم از لحظه u_r تا پایان دورهٔ سیستم برابر مجموع این مخارج در مدت T_i و از u_r+T_i تا پایان دوره است. قلم اول را با $C(T_i)$ و قلم دوم را با $C(i,T_i)$ نشان می‌دهیم. برای تعیین این مخارج، متغیر تصادفی Z_m را برابر مدت زمانی که طول می‌کشد تا سطح موجودی از i به s برسد تعریف می‌کنیم. در این صورت به ازاء هر z>o ,

$$m = i\text{-}s$$

$$P(Z_m<z) = P(X_z>m) \quad (۲)$$

و لذا، چنانچه تابع احتمال Z_m را با $h_m(z)$ و تابع توزیع تجمعی آنرا با $H_m(z)$ نشان دهیم، آنگاه به ازاء مقدار z برای Z_m داریم.

$$H_m\,(Z) = 1 - \sum_{x=0}^{m-1} p\,(x;z)$$

به ازای هر $0<t<T_i$ متوسط سطح موجودی در زمان u_r+t برابر است.

$$\begin{cases} i - \mu_t & ,\ t<z \\ C + \mu_t + \displaystyle\sum_{x=s}^{\infty} (x-s)\,p\,(x\,;\,t-z) & t>z \end{cases}$$

اگر $z>T_i$ باشد، مخارج کمبود در طول مدت T_i صفر و متوسط مخارج نگهداری کالا در انبار برابر

$$k_1 \pm C \int_0^{T_i} (i - \mu_t)\,dt$$

می‌باشد که C مخارج نگهداری یک واحد کالا به مدت یک واحد زمان است. اگر $z<T_i$ آنگاه متوسط مخارج نگهداری در فاصله زمانی T_i برابر

$$k_2 = C \int_0^{T_i} (i - \mu_2)\,dt + c \int_z^{T_i} \sum_{x=s}^{\infty} (x-s)\,p\,(x;t-z)\,dt$$

و متوسط مخارج کمبود در همین فاصله برابر

$$k_3 = \hat{\pi} \int_z^{T_i} \sum_{x=s}^{\infty} (x - s)\ p(x;\ t - z)\,dt +$$

$$\pi \sum_{x=s}^{\infty} (x-s)\, p(x; T_i - Z)$$

می‌باشد، که π هزینهٔ کمبود یک واحد کالا مستقل از مدت کمبود و π هزینهٔ کمبود یک واحد کالا به مدت یک واحد زمان است. بنابراین

$$C(T_i) = \int_0^{T_i} (K_1 + K_2 + K_3)\, h_m(z)\, dz + \int_{T_i}^{\infty} K_1 h_m(z)\, dz$$

به ازای مقدار x برای X_{Ti}، مخارج سیستم از $u_r + T_i$ تا پایان دورهٔ سیستم عبارتست از

$$\begin{cases} J & x \geq m \\ J + C(i-x, T_{i-x}) & x < m \end{cases}$$

که J هزینهٔ بازنگری می‌باشد. بنابراین

$$C(i, T_i) = C(T_i) + J + \sum_{x=0}^{m-1} C(i-x, T_{i-x})\, p(x; T_i)$$

بدیهی است متوسط مخارج یک دوره از سیستم برابر $A+C(S,T_s)$ است که A هزینهٔ انجام یک سفارش تدارک کالاست. اگر حالت پایدار سیستم را با سیاست بازنگری پیوسته در نظر بگیریم، متوسط طول دورهٔ سیستم برابر m/μ_1 است. چنانچه مقدار تقریبی متوسط طول یک دورهٔ در این سیاست را نیز مساوی این مقدار بگیریم آنگاه متوسط هزینهٔ سالیانهٔ سیستم با روش بازنگری پویا برابر

$$K(s, S, T_{S-1}, T_{S-1}, \ldots, T_{S+1}) = \mu_1 \left[A + C(S, T_S)\right] / m$$

خواهد بود.

۳- توزیع پواسون برای تقاضا

در حالتی که تقاضا دارای توزیع پواسون با میانگین λ در واحد زمان باشد، داریم

$$P(x;t) = \left[(\lambda t)^x e^{-\lambda t}\right] / x!$$

در این حالت

$$h_m(z) = \frac{\lambda (\lambda z)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda z}$$

همچنین اگر تابع مکمل توزیع تجمعی را با P(X;t) نشان دهیم داریم

$$\sum_{x=s}^{\infty} (x-s)\, p(x; t-z) = \lambda(t-z)\, p(s-1; t-z) - sp(s; t-z)$$

$$\int_0^{T_i} t^n p(s;t)\, dt = \frac{T_i^{n+1}}{n+1} p(s; T_i) - \frac{(s+n)!}{\lambda^{n+1}(n+1)(s-1)!} p(n+s+1; T_i)$$

با استفاده از روابط فوق

$$C(T_i) = (i - 1/2\lambda T_i) + \int_0^{T_i} g(T_i, z)\, h_m(z)\, dz$$

$$g(T_i, z) = 1/2\, \lambda (T_i - z)\ [2\pi +$$

$$(c+\hat{\pi})(T_i - z)]\,p(s-1\,;T_i - z)+\frac{c+\hat{\pi}}{2\lambda}\,s\,(s+1)\,p(s+1\,;\,T_i - z)\;-s\,[\pi + (C+\hat{\pi})\,(T_i - z)]\,p(s\,;\,T_i - z)$$

از روابط فوق مشهود است که، تابع هزینهٔ سالیانه به شکلی نیست که بتوان با روشهای تحلیلی مقادیر بهینه T_i ، $i=s+1,....S$ را محاسبه نمود. لذا بـا اسـتفاده از روشـهای عددی مقادیر بهینه T_i به ازای $s+1$ تا S محاسبه می‌گردند.

بـنابه نـقش بـازنگری‌ها در ایـن روش، اولیـن دورهٔ بازنگری یعنی T_S مهمترین دوره بوده و بیشترین اثر را بـر تابع هزینهٔ سالیانه دارد. همانطورکه جدول ۱ نشان می‌دهد، اگر طول این دوره مناسب انتخاب شود، احتمال وجود دورهٔ T_{S-1} بسیارکم و اثر آن بر تابع مذکور ناچیز خواهد بود. اما دوره‌های T_{s+1}, T_{s+2} نقش مهم‌تری را دارا می‌باشند. علت این امر این است که بعد از اولین دوره (در اولین بازنگری) احتمال مشاهدهٔ وضعیت $s+1$ یا $s+2$ نسبتاً بالاست و این بـدان مـعنی است کـه وجـود دورهٔ T_{s+1} یـا T_{s+2} در بازنگری‌ها بسیار مـحتمل مـی‌باشد. در نـتیجه طـول ایـن دوره‌ها اثر قابل‌توجهی بر هزینهٔ سالیانهٔ سیستم دارد.

$S=16$, $S=5$, $\lambda=4$, $C=2$, $\pi = 99$, $\pi=1.5$, $A=35$, $J=12$

$T^*=(2.49, 2.4, 2.36, 2.17, 1.81, 1.61, 1.4, 1.23, 1.08, 0.95, 0.74)$, $K^*=38.91$

T_S	K	%inc	T_{S-1}	K	%inc	T_{s+1}	K	%inc
0.60	42.77	9.8	0.80	38.92	0.0	0.30	39.56	1.6
1.20	41.35	6.7	1.20	38.92	0.0	0.90	39.04	0.3
1.80	40.31	3.5	1.60	38.92	0.0	1.20	40.13	3.1
2.40	38.97	0.1	2.00	38.92	0.0	1.50	42.50	9.1
3.00	41.14	5.7	2.80	38.92	0.0	2.10	50.34	29.3
3.23	44.22	19.6	3.20	38.92	0.0	2.70	60.35	57.8
3.83	59.70	52.6	4.00	38.94	0.0	3.0	65.35	70.4
4.43	83.79	115.2	4.40	38.95	0.0	3.9	80.92	106.2
5.03	111.44	188.1	4.80	38.97	0.1	4.5	89.75	130.6
6.53	173.99	347.3	5.20	38.99	0.1	5.10	98.80	153.8

جدول ۱- اثر دوره‌های بازنگری (T_S, T_{S-1}, T_{s+1}) بر تابع مخارج سالیانه

جدول ۲ که یک نمونه از موارد متعدد بررسی شده است، نشان می‌دهد وقتی که هزینه‌های کمبود نسبت به هزینه نگهداری زیاد نباشد، تفاوت چندانی بین روشهای مختلف بازنگری از نظر مخارج وجود ندارد. اما در حالت بالا بودن هزینه کمبود روش بازنگری پویا کاهش قابل توجهی را ایجاد می‌کند.

λ	1	9	99	
	20.20	30.49	42.05	
4	20.00	30.11	38.92	(s,S,T)
10	33.72	50.91	63.96	بازنگری پویا
	33.71	49.76	59.81	

جدول ۲- حداقل مخارج سالیانه روش‌های (s,S,T) و بازنگری پویا

References

[1] Cox, D.R., Renewal Theory, Methuen and Co.Ltd (1962).

[2] Ehrhardt, R., The power approximation for computing (s,S) Inventory policies, Mgmt Sci, **25** 777-786 (1979).

[3] Hadley, G. and Whitin, T.M., Analysis of Inventory Systems, prentice- Hall Inc (1963).

[4] Shahani, A.K., Nearly priodic Review Times in (s;S) Inventory policy, Faculty of Mathematical studies **67** University of southampton (1982).

[5] Salehi- Fathabadi, H., Scheduled Review Times in s-S inventory policy, University of Southampton, Faculty of Mathematical studies, **62** Feb. (1982).

[6] Freelad, j.R. and porteus, E.L., Evaluating the Effectiveness of a New Method for computing Approximately optimal (s,S) Inventory policies, Operation Res., **28** (1979).

[7] Rao, S.S., Optimization Theory and Applications, wiley Eastern Ltd.