

نشریه دانشکده علوم ، جلد چهارم ، شماره سوم ، مهرماه ۱۳۵۱

پژوهشهای کنونی در آنالیز تابعی

آقای پروفیسور گارنیر استاد و محقق ریاضی دانشگاه لیژ بلژیک که به دعوت دانشگاه تهران به ایران آمده بودند در روزهای ۲۷ و ۲۸ فروردین ۱۳۵۱ کنفرانس‌هایی در دانشکده علوم ایراد کردند که به علت اهمیت علمی خاص خلاصه آنها در زیر چاپ می‌شود .

ازچندی به اینطرف جنبشی بزرگ درجهت بررسی پایه‌های آنالیز تابعی پیدا شده است . تا این اواخر در این علم اصل انتخاب شمارش ناپذیر (Axiome de choix non dénombrable) یا هم‌ارز آن اصل زرن (Zorn) و یاننتایج این اصل آزادانه بکار برده می‌شد و از آنجمله پایه‌های هامل (Bases de Hamel)، اولترا فیلترها (Ultrafiltres) و قضایای تیکونوف (Tychonov) و غیره .

ولی اخیراً کارهای پروفیسور سولوا (R. Solovay) اصل جدیدی را عرضه کرده است که گرچه با اصل زرن متناقض است ولی نتایجش به همان اندازه اصل زرن ثمربخش است . این اصل جدید بیان می‌کند که هر تابع تعریف شده روی خط حقیقی بر مقیاس لبک (Lebesgue) اندازه‌پذیر است . می‌توان ثابت کرد که چنانچه اصل انتخاب شمارش ناپذیر و صورتهای هم‌ارز آن را کنار بگذاریم و اصل سولوا را بپذیریم به تناقضی بر نمی‌خوریم . همانطور که با پذیرفتن اصل زرن و کنار گذاشتن این اصل جدید نیز تناقضی نخواهیم داشت .

گرچه هنوز اثرات این اصل جدید در آنالیز تابعی بطور کامل ارزیابی نشده است ولی از هم‌اکنون پیدا است که این اصل جدید بما امکان می‌دهد ثابت کنیم هر نیم نرم (Semi-norme) در یک فضای باناخ (Banach) یا هر نیم نرم در یک فضای فرشه (Fréchet) و بطور کلی هر نیم نرم در یک فضای اولترا برنولژیک (Ultra-bornologique) الزاماً پیوسته است . و در نتیجه ثابت می‌شود که همه فونکسیونل‌های تعریف شده روی چنین فضاهائی و همچنین همه اپراتورهای خطی چنین فضاهائی الزاماً پیوسته‌اند .

این نکات جدید ایجاب می‌کنند که تجدیدنظری در شیوه سنتی مطالعه آنالیز تابعی به عمل آید و ما را به سوی بنانهادن یک آنالیز تابعی سازنده (Constructive) یعنی یک آنالیز تابعی که در آن اصل انتخاب شمارش ناپذیر کنار گذاشته شود رهنمون می‌شوند . بدین ترتیب این دید جدید زمینه محکمی است برای پژوهشگرانی که بخواهند از بکار بردن هر گونه اصل جدیدی اجتناب کنند ، بعلاوه این دید

تازه می‌تواند نقطه عزیمتی باشد برای آن دسته از محققینی که بخواهند بعداً اصل انتخاب شمارش ناپذیر را قبول کنند و یا اصل سولوا را بپذیرند.

پژوهشهایی که در این زمینه مخصوصاً در دانشگاه لیژ بلژیک بعمل آمده است از هم اکنون مسلم می‌سازد که در متون کلاسیک در کاربرد اصل انتخاب شمارش ناپذیر اغراق شده است و ثابت می‌کند که می‌توان بدون این اصل فیزیک آنالیز تابعی زیبا و مؤثر بدست آورد.

پروفسور گارنیر در کنفرانسهای خود نخست اصل انتخاب شمارش ناپذیر و صورت‌های هم‌ارز آن را تشریح کرد و سپس نشان داد که چرا باید این اصل را کنار گذاشت و بدون آن یک آنالیز تابعی ساخت. برای اثبات ویژگیهای روش سازنده در آنالیز تابعی، آقای پروفسور گارنیر متوالیاً تعدادی از نکات حساس آنالیز تابعی معمولی را که می‌توان آنها را به صورت سازنده برگرداند بررسی کرد و بویژه درباره قضیه هان باناخ (Hahn-Banach) مفصلاً بحث کرد و این قضیه را به دو طریق به حالت سازنده برگرداند یکی توسط فرض‌های تجزیه (Séparabilité) که به شکلی ماهرانه بیان شده است و دیگر با جانشین کردن قضیه به قضیه‌ای مشابه که درباره نیم‌نرم‌ها گفته شود. او همچنین قضیه پراهمیت آلاو گلو (Alaoglu) را مورد بحث و بررسی قرارداد.

سخنران سپس بطور مشروح به جبرهای باناخ پرداخت و در این مورد با بیان صورت سازنده قضیه معروف گلفاند (Guelfand) درباره وجود فونکسیونل‌ها ضربی که روی یک ایدال ویژه مفروض صفرند نشان داد که چگونه می‌توان از بنیاد نهادن نظریه جبرهای باناخ روی مفهوم ایدال ساکزیمال (Idéal maximal) اجتناب کرد.

پروفسور گارنیر بطور کلی ثابت کرد که طریقه سازنده آنالیز تابعی در وضع کنونی شناخت ما جوابگوی ضرورت‌ها است و با کمی مهارت می‌توان یک متن معتبر از آنالیز تابعی را، مستقل از هر اصل متمم که بعداً ممکن است انتخاب شود، در دسترس همگان قرارداد.

indépendants de tout nouvel axiome; elle peut servir de point de départ à ceux qui désirent adjoindre ultérieurement aux axiomes traditionnels, soit l'axiome du choix non dénombrable, soit l'axiome de Solovay.

Les recherches entreprises, notamment à Liège, sur cette nouvelle présentation de l'Analyse Fonctionnelle ont conduit, d'ores et déjà, à mettre en évidence le fait que l'intervention de l'axiome du choix non dénombrable avait été fortement exagérés dans les exposés classiques et qu'on peut sans cet axiome obtenir une Analyse Fonctionnelle élégante et efficace.

Dans ses conférences, Monsieur GARNIR décrit d'abord l'axiome du choix non dénombrable et ses formes équivalentes. Il montre ensuite pourquoi il importe de laisser cet axiome de côté et de construire sans lui une Analyse Fonctionnelle efficace.

De manière à bien mettre en évidence les caractéristiques des méthodes constructive de présentation, il examine successivement un certain nombre de points névralgiques de l'Analyse Fonctionnelle classique pour lesquels on peut donner d'intéressantes variantes constructives.

En particulier, il discute le théorème de Hahn-Banach, qu'il arrive à tourner constructivement, soit grâce à des hypothèses de séparabilité habiles, soit en le remplaçant par un théorème analogue relatif aux semi-normes.

Il discute également l'important théorème de ALAOGU.

Une partie importante de son exposé est consacrée aux algèbres de Banach. Dans ce cadre, il montre comment éviter de faire reposer toute la théorie sur idéaux maximaux, en donnant une variante constructive du célèbre théorème de GELFAND relatif à l'existence des fonctionnelles multiplicatives qui s'annulent sur un idéal propre donné.

Au total, il montre que la présentation constructive de l'Analyse fonctionnelle répond à une nécessité dans l'état actuel de nos connaissances et, qu'avec un peu d'ingéniosité, on peut mettre à la disposition de tous une version efficace de l'Analyse Fonctionnelle indépendante du choix ultérieur qu'on fera des axiomes supplémentaires.

Mentionnons finalement que les idées exprimées dans cette conférence sont développées dans H.G. GARNIR, DE WILDE, et J. SCHMETS "ANALYSE FONCTIONNELLE", Théorie constructive des espaces linéaires à semi-normes, "Tome I: théorie générale; tome II: théorie de la mesure; tome III: espaces usuels; (Birkhäuser Verlag Basel 1968, 1973,...).

Notes

Bull. Faculty of Science, Tehran Univ. Vol. 4. No 3, Autumn 1972

Les Recherches Actuelles en Analyse Fonctionnelle

H.C. Garnir

Université de Liège, Belgique

Depuis quelques temps, un grand mouvement se fait dans les idées concernant les bases de l'Analyse Fonctionnelle.

Jusqu'à ces dernières années, cette science utilisait très libéralement l'axiome du choix non dénombrable ou son équivalent, l'axiome de Zorn, soit directement, soit par ses conséquences, parmi lesquelles il convient de mentionner le libre emploi des bases de Hamel et des ultrafiltres, le théorème de TYCHNOV, etc.

Or, grâce aux travaux du professeur R. SOLOVY, un nouvel axiome vient de naître qui paraît, aussi fructueux que l'axiome de Zorn, mais qui lui est contradictoire, Cet axiome affirme que toute fonction définie sur la droite est mesurable pour la mesure de LEBESGUE, Comme pour l'axiome de Zorn, on montre que, pour autant qu'on laisse de côté l'axiome du choix non dénombrable et ses formes équivalentes, l'introduction de l'axiome de SOLVAY n'introduit pas de contradiction.

On n'a pas encore mesuré entièrement l'impact de ce nouvel axiome en Analyse Fonctionnelle, Mais d'ores et déjà, on sait qu'il permet de prouver que toute semi-norme définie dans un espace de Banach, de Fréchet et plus généralement dans un espace ultrabornologique est nécessairement continue. Ce qui entraîne que toutes les fonctionnelles définies dans de tels espaces ou que tous les opérateurs linéaires partant de tels espaces sont nécessairement continus.

Ces faits nouveaux exigent une révision totale de l'exposé traditionnel de l'Analyse Fonctionnelle et conduisent à l'édification de l'Analyse Fonctionnelle Constructive, c'est-à-dire d'une analyse fonctionnelle qui n'utilise pas l'axiome du choix non dénombrable, Cette version fournit ainsi une plateforme solide à ceux qui désirent rester