مجله علوم دانشگاه تهران
جلد بیست و هفتم (۱۳۸۰) شماره ۲ (۲۳۳-۲۲۷)

اثبات قضیه آلمانسی در حالت کلی (Generalized Almansi's Theorem)

اسد ا... نورزاد[1]، مرتضی اسکندری قادی[2]
۱. عضو هیات علمی دانشکده فنی- دانشگاه تهران
۲. عضو هیات علمی دانشگاه علوم و فنون مازندران
(دریافت: ۷۹/٥/۱ ؛ پذیرش: ۸۰/٤/٤)

چکیده

قضیه آلمانسی در کلی ترین شکل خود به صورت:

$$\prod_{i=1}^{n}\nabla_i^2 F=\prod_{i=1}^{n}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_i\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_i'\frac{\partial^2}{\partial z^2}]F=0$$

مورد مطالعه قرار گرفته و جواب عمومی این مساله از مرتبه 2n به حل n معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه 2 تبدیل می‌شود. براساس ایده دینگ و اوبنگز، جواب عمومی‌ای از مساله طوری اختیار می‌شود که در معادله لاپلاس صدق نماید. سپس با استفاده از اصل استقراءِ ریاضی جواب عمومی مساله به حل مسائل ساده تر تبدیل می‌شود. در انتها حالتهای خاص قضیه آلمانسی استنتاج می‌شود که معرف صحت جواب بدست آمده می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: *معادلات دیفرانسیل جزئی، قضیهٔ آلمانسی، معادلات بی‌هارمونیک و معادلات هارمونیک.*

۱- مقدمه

در بسیاری از مسائل مهندسی به خصوص مهندسی مکانیک و سازه، حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به حل مساله آلمانسی می‌انجامد. از آن میان می‌توان حل مسائل تئوری ارتجاعی مربوط به محیطهای همسان با توابع پتانسیل گالرکین رانام برد که به حل مساله بی‌هارمونیک $\nabla^2\nabla^2 F = 0$ تبدیل می‌شود. همچنین حل مسائل تئوری ارتجاعی در محیطهای همسان عبوری با توابع پتانسیل لخنیتسکی (Lekhnitskii) به معادله:

$$\prod_{i=1}^{2}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_i\frac{\partial^2}{\partial z^2}]F_i = 0$$

تبدیل می‌شود. اگر ناهمسانی محیط بیشتر شود و مسائل تئوری ارتجاعی مربوط به محیطهای ارتوتروپ کامل پی‌گیری شوند، حل آن به کلی‌ترین شکل مساله آلمانسی می‌انجامد.

مسأله آلمانسی در حالتی که $c_i = c_i' = 1$ است در مرجع (Eubanks, 1954) مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت جواب مساله از مرتبه 2n به حل n معادله لاپلاس تبدیل شده است. با ترکیب جوابهای مسائل لاپلاس، حل عمومی مسأله بدست می‌آید. همچنین این مسأله در حالتی که $c_i = 1$ و $c_i' \neq 1$ است توسط دینگ و همکاران مطالعه شده و جواب عمومی آن به حل معادلات دیفرانسیل هم اپراتور منوط شده است (Ding *et al*., 1996). مشابه کارهای دینگ و اوبنگز جواب عمومی در این مقاله، به حل n معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی از مرتبه ۲ تبدیل خواهد شد (Ding, 1996; Eubanks, 1954) . این معادلات دیفرانسیل هم اپراتور بوده و با حل یکی از آنها، حل بقیه نیز کاملاً مشخص می‌گردد. در انتهای مقاله توجه خواننده به حالتهای خاصی از مساله جلب خواهد شد. این حالتهای خاص می‌توانند به منظور اثبات صحت جواب بدست آمده مورد استفاده قرار گیرد.

۲- قضیه آلمانسی در حالت کلی

فرض کنید R^3 یک محیط مرتبط ساده در فضای سه بعدی (x, y, z) محصور بوسیله Γ باشد به طوریکه هیچ خط مستقیمی Γ را در بیش از دو نقطه قطع نکند. همچنین فرض کنید $F_n(x,y,z)$ جوابی برای مساله زیر باشد:

$$\prod_{i=1}^{n}\nabla_i^2 F_n = \nabla_1^2\nabla_2^2\cdots\nabla_n^2 F_n = 0 \qquad F_n \in R^3 \tag{۱}$$

که در آن:

$$\nabla_i^2 = D_x^2 + c_i^2 D_i^2 \tag{۲}$$

$$D_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_i^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad , \quad D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{۳}$$

و c_i و b_i ثابت هستند. در این صورت $F_n(x,y,z)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F_n(x,y,z) = F_{n-1}(x,y,z) + (y^{m_1} + \frac{z^{m_2}}{\prod_{j=1}^{m_2} b_j})F^{(n)} \tag{۴}$$

به طوریکه F_{n-1} و $F^{(n)}$ به ترتیب در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\prod_{i=1}^{n-1} \nabla_i^2 F_{n-1} = 0 \tag{۵}$$

$$\nabla_n^2 F^{(n)} = 0 \tag{۶}$$

در رابطه (۴)، m_1 برابر تعداد c_i^2 های برابر c_n^2 و m_2 برابر تعداد b_i^2 های برابر b_n^2 است به طوریکه همواره $m_2 \le n-1$ و $m_1 \ge 0$ می‌باشد.

۳- اثبات

برای اثبات این قضیه، ابتدا اتحاد زیر را می‌نویسیم:

$$\nabla_i^2 [A(y,z)B(x,y,z)] = A\nabla_i^2 B + c_i^2 B D_i^2 A + 2c_i^2(A_{,y}B_{,y} + b_i^2 A_{,z}B_{,z}) \tag{۷}$$

از این رابطه، نتایج زیر حاصل می‌گردد:

$$\nabla_i^2 [A(y)B(x,y,z)] = A\nabla_i^2 B + c_i^2 B D_i^2 A + 2c_i^2 A_{,y}B_{,y} \tag{۸}$$

$$\nabla_i^2 [A(z)B(x,y,z)] = A\nabla_i^2 B + c_i^2 B D_i^2 A + 2c_i^2 b_i^2 A_{,z}B_{,z} \tag{۹}$$

که در آن اندیسهای زیرنویس (y) و (z) به ترتیب به معنی مشتق نسبت به y و z می‌باشند. همچنین اتحاد زیر بدیهی است:

$$\nabla_j^2 F^{(i)} = (c_j^2 - c_i^2) D_j^2 F^{(i)} \tag{۱۰}$$

که در آن $\nabla_i^2 F^{(i)}$ برابر صفر فرض شده است.

اگر تابع F یک تابع هارمونیک با عملگر ∇_i^2 باشد، آنگاه برای $m>0$، به روش استقراء ریاضی می توان نشان داد که:

$$\nabla_i^{2m}(y^k F) = \begin{cases} 0 & if \quad k = m-1 \\ 2^m m!\, c_i^{2m}\, b_i^{2m}\, D_y^m\, F & if \quad k = m \end{cases} \tag{۱۱}$$

و

$$\nabla_i^{2m}(z^k F) = \begin{cases} 0 & if \quad k = m-1 \\ 2^m m!\, c_i^{2m}\, b_i^{2m}\, D_z^m\, F & if \quad k = m \end{cases} \tag{۱۲}$$

که در آن $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$ و $D_z = \frac{\partial}{\partial z}$ می‌باشند. به منظور نشان دادن صحت روابـط (۱۱) و (۱۲)، ابتدا رابطه (۱۱-الف) را درنظر می‌گیریم. به‌راحتی نشان داده می‌شود که رابطه (۱۱-الف) برای $m = 1$ و $m = 2$ برقرار است. به روش استقراء ریاضی فرض می کنیم که این رابطه برای m-1 برقرار است، یعنی:

$$\nabla_i^{2(m-1)}(y^{m-2} F) = 0 \tag{۱۳}$$

نشان داده می‌شود که رابطه (۱۱-الف) برای هر m نیز برقرار است. بدین منظـور بـا اسـتفاده از رابطه (۸) داریم:

$$\begin{aligned} \nabla_i^{2m}(y^{m-1} F) &= \nabla_i^{2(m-1)} \nabla_i^2 (y^{m-1} F) \\ &= \nabla_i^{2(m-1)}(y^{m-1} \nabla_i^2 F) + (m-1)(m-2)\, c_i^2\, \nabla_i^{2(m-1)}(y^{m-3} F) \\ &\quad + 2(m-1)\, c_i^2\, \nabla_i^{2(m-1)}(y^{m-2} F_{,y}) = 0 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

بدین ترتیب رابطه (۱۱-الف) برای k=m-1 ثابت شده است. برای اثبات رابطه (۱۱-ب) دو بـاره از روش استقراء ریاضی استفاده می کنیم. واضح است که ایـن رابطـه بـرای $m = k = 1$ برقـرار است، زیرا با استفاده از رابطه (۸) داریم:

$$\nabla_i^2 (yF) = y \nabla_i^2 F + 2 c_i^2 F_{,y} = 2 c_i^2 D_y F \tag{۱۵}$$

براساس روش استقراء ریاضی فرض می‌کنیم که رابطـه (۱۱-ب) بـرای m-1 نیـز برقـرار اسـت، یعنی:

$$\nabla_i^{2(m-1)}(y^{m-1} F) = 2^{m-1}(m-1)!\, c_i^{2(m-1)} D_y^{m-1} F \tag{۱۶}$$

در این صورت برای m داریم:

$$\begin{aligned} \nabla_i^{2m}(y^m F) &= \nabla_i^{2(m-1)} \nabla_i^2 (y^m F) \\ &= \nabla_i^{2(m-1)}(y^m \nabla_i^2 F) + m(m-1)\, c_i^2\, \nabla_i^{2(m-1)}(y^{m-2} F) \end{aligned}$$

$$+2m\, c_i^2 \nabla_i^{2(m-1)}(y^{m-1} F_{,y}) = m!\, c_i^{2m} D_y^m F \qquad (۱۷)$$

که در آن از روابط (۸) ، (۱۱-الف) و (۱۶) استفاده شده است. بدین ترتیب اثبـات روابـط (۱۱) کامل شده است. برای اثبات روابط (۱۲)، مسقیماً می‌توان از روابط (۱۱) اسـتفاده کـرد، فقـط کافیست به‌جای D_y عبارت $b_i D_z$ قرار داده شود.

در ادامه، برای اثبات رابطه (۴)، بدون اینکه از کلیت مساله کاسته شود، فرض می‌شود:

$$c_i^2 = c_n^2 \qquad (i = n-m_1\, , n-m_1+1\, , \cdots , n-1) \qquad (۱۸\text{-الف})$$

$$c_i^2 = c_n^2 \qquad (i = 1\, , 2\, , \cdots , n-m_1-1) \qquad (۱۸\text{-ب})$$

و

$$b_i^2 = b_n^2 \qquad (i = n-m_2\, , n-m_2+1\, , \cdots , n-1) \qquad (۱۹\text{-الف})$$

$$b_i^2 = b_n^2 \qquad (i = 1\, , 2\, , \cdots , n-m_2-1) \qquad (۱۹\text{-ب})$$

با فرض $m_1 = m_2 = m$، رابطه (۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$F_{n-1}(x,y,z) = F_n(x,y,z) - (y^m + \frac{z^m}{b}) F^{(n)} \qquad (۲۰)$$

که در آن $b = \prod_{j=1}^{m} b_j$ است. با اعمال عملگر $\prod_{i=1}^{n-1} \nabla_i^2$ بر این رابطه، داریم:

$$\prod_{i=1}^{n-1} \nabla_i^2 F_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} \nabla_i^2 F_n - \prod_{i=1}^{n-1} \nabla_i^2 (y^m + \frac{z^m}{b}) F^{(n)} = 0 \qquad (۲۱)$$

کـه در آن از رابطـه (۵) اسـتفاده شـده اسـت. بـا اسـتفاده از روابـط (۸)، (۱۰) و (۱۱) و (۱۸) می‌توان نوشت:

$$\prod_{i=1}^{n-1} \nabla_i^2 (y^m F^{(n)}) = \prod_{i=1}^{n-m-1} \nabla_i^2 [\nabla_n^{2m} (y^m F^{(n)}) = 2^m m!\, c_n^{2m} D_y \prod_{i=1}^{n-m-1} \nabla_i^2 F^{(n)}$$

$$= H_y D_y^{2n-m-2} F^{(n)} \qquad (۲۲)$$

H_y در این رابطه برابر است با:

$$H_y = 2^m m!\, c_n^{2m} \prod_{i=1}^{n-m-1} (c_i^2 - c_n^2) \qquad (۲۳)$$

به همین ترتیب رابطه (۲۴) بدست می‌آید:

$$\prod_{i=1}^{n-1} \nabla_i^2 (\frac{z^m}{b} F_2^{(n)}) = H_z D_z^{2n-m-2} F_2^{(n)} \quad (۲۴)$$

که درآن H_z برابر است با:

$$H_z = \frac{2^m}{b} m! c_n^{2m} b_n^{2m} \prod_{i=1}^{n-m-1} (c_i^2 b_i^2 - c_n^2 b_n^2) \quad (۲۵)$$

با قرار دادن (۲۲) و (۲۴) در رابطه (۲۱) به نتیجه زیر می رسیم:

$$(H_y D_y^{2n-m-2} + H_z D_z^{2n-m-2}) F^{(n)} = \prod_{i=1}^{n-1} \nabla_i^2 F_n \quad (۲۶)$$

این معادله دیفرانسیل، در واقع یک معادله دیفرانسیل غیرهمگن بـا عملگرهـای D_y و D_x از مرتبه یکسان بوده و بر اساس کار اخیر دینگ و همکاران دارای جواب است (Ding *et al.*, 1996). بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

در ادامه توجه خواننده را به حالتهای خاصی که درآن $m_1 = m_2 = 0, 1, 2$ است، جلب می‌کنیم. در حالت $m_1 = m_2 = 0$ ، رابطه (۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_n = F_{n-1} + F^{(n)} \quad (۲۷)$$

که در آن F_{n-1} و $F^{(n)}$ در معادلات (۵) و (۶) صدق می‌کنند. جواب معادله (۵)، با استفاده از (۲۷) به صورت زیر می‌باشد:

$$F_{n-1} = F_{n-2} + F^{(n-1)} \quad (۲۸)$$

در این رابطه F_{n-2} و $F^{(n-1)}$ به ترتیب در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\prod_{i=1}^{n-1} \nabla_i^2 F_{n-2} = 0 \quad (۲۹)$$

$$\nabla_{n-1}^2 F^{(n-1)} = 0 \quad (۳۰)$$

به همین ترتیب، جواب نهایی برای F_n برابر است با:

$$F_n = F^{(1)} + F^{(2)} + ... + F^{(n)} \quad (۳۱)$$

که در آن $F^{(i)}$ ها از حل معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$\nabla_i^2 F^{(i)} = 0 \qquad (i = 1,2,...,n) \quad (۳۲)$$

که جواب معادله دیفرانسیل (۱) که از مرتبـه 2n اسـت بوسـیله حـل n معادلـه از مرتبـه 2 بدست می آید. همچنین ، در حالتهای $m_1 = m_2 = 1$ و $m_1 = m_2 = 2$ به ترتیب داریم:

$$F_n = F^{(1)} + F^{(2)} + \ldots + F^{(n-1)} + (y + \frac{z}{b_n}) F^{(n)} \qquad (۳۳)$$

$$F_n = F^{(1)} + F^{(2)} + \ldots + (y + \frac{z}{b_n}) F^{(n-1)} + (y^2 + \frac{z^2}{b_n^2}) F^{(n)} \qquad (۳۴)$$

۴- نتیجه گیری

در این مقاله با ارائه قضایای ساده با استفاده از اصل استقراء ریاضی، حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی از مرتبه 2n (مساله آلمانسی) به حل n معادله هم اپراتور از مرتبه 2 تبدیل شده است. جواب مساله برای حالتهایی که هیچ دو اپراتوری در رابطه (۱) مشابه نیستند به صورت صریح ارائه شده است. همچنین برای حالتهایی که دو اپراتور و یا سه اپراتور مثل هم باشند، جواب صریح داده شده است. در معادلات دیفرانسیل ناشی از مسائل تئوری ارتجاعی n=3 بوده و به همین علت جوابهای صریح (۳۱) و (۳۳) و (۳۴) مستقیماً در حل معادلات تئوری ارتجاعی مورد استفاده قرار می گیرند.

Reference

Ding, H., Chen, B., and Liang, J., (1996), *Generalized Solutions for Coupled Equations for Piezoelectric Media*, Int. J. Solids Struct., **33**, 2283-2298

Eubanks, R. A., and Strenberg, E., (1954), *On the Axisymmetric Problem of Elastic Theory for a Medium with Transverse Isotropy*, J. Ration. Mech. Anal., **3**, 89-101.

Lekhnitskii, S. G., (1981), *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, MIR Publishers, Moscow.