مجله علوم دانشگاه تهران
جلد بیست و هشتم (۱۳۸۱) شماره ۲ (۲۵۷-۲۵۱)

شمارش تعداد θ-زوج‌ها در گروهی متناهی

رسول سلیمانی و علی‌رضا اشرفی
گروه ریاضی – دانشکده علوم، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
(دریافت: ۱۵/ ٦ /۷۹ ؛ پذیرش: ٤/ ٦ /۸۰)

چکیده

بهاتاچاریا و موخرجی (۱۹۹۰) مفهوم θ- زوج را در ادامه کار دسکینز روی ساختار زیرگروههای بیشین، یک گروه متناهی ارائه نمودند. ژائو در سال ۱۹۹۵ نشان داد که برای هر زیر گروه بیشین M از گروه متناهی G، حداقل یک θ- زوج نرمال بیشین متناظر با M می‌توان یافت.

گروه G را $n\theta$- زوج می‌نامیم هرگاه $|\theta(G)| = n$ که در آن $\theta(G)$ مجموعه تمام θ- زوج‌های G می‌باشد. در این یادداشت ثابت می‌کنیم G، گروهی1θ- زوج است اگر و تنها اگر G دوری از مرتبه توانی از یک عدد اول باشد. به علاوه نشان می‌دهیم که هیچ گروهی با دقیقاً دو θ-زوج وجود ندارد. در پایان نشان می‌دهیم که به ازای$n \neq 2, 3$، گروهی دقیقاً با n، θ- زوج وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: *θ-زوج، θ-زوج بیشین، گروه $n\theta$-زوج.*

۱- مفاهیم اولیه

دسکینز درسال ۱۹۵۹ خانواده خاصی از زوج زیر گروههای وابسته به هرزیر گروه بیشین یک گروه را مطالعه و مفهوم اندیس مرکب یک گروه را معرفی نمود (Deskins, 1959) . بیان این مفهوم انگیزه مناسبی برای ارائه مفهوم θ- زوج بود که توسط بهاتاچاریا و موخرجی در سال ۱۹۹۰ ارائه شد، که تعریف دقیق آن بدین صورت است (Mukherjee, Bhattacharya,1990) :

تعریف۱: فرض‌کنیم G گروهی دلخواه وM زیر گروه بیشینی از آن باشد . همچنین A و B را دو زیر گروه G در نظر می گیریم. زوج (A,B) را یک θ-زوج برای M نامند هرگاه:

۱. $A \subsetneq B$ و $B \lhd G$،

۲. $G = \langle M, A\rangle, M = \langle M, B\rangle$،

۳. $\frac{A}{B}$ شامل هیچ زیرگروه نرمال سره نابدیهی از $\frac{G}{B}$ نباشد.

مجموعه تمام θ- زوج‌های M را با $\theta(M)$ نشان داده و اجتماع تمام $\theta(M)$ها را با $\theta(G)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر $\theta(G) = \cup_{M \le \cdot G} \theta(M)$ که در آن نماد $M \le \cdot G$ معرف آن است که M زیر گروه بیشین G است. رابطه $\le$ را روی $\theta(M)$ به این‌صورت تعریف می‌کنیم که $(A, B) \le (C, D)$ اگر وتنها اگر $A \le C$. به سادگی می‌توان دیدکه $(\theta(M), \le)$ یک مجموعه مرتب جزئی است. هر عضو بیشین $\theta(M)$ را یک θ-زوج بیشین می‌نامیم. بعلاوه اگر به ازای $C \lhd G, (C, D) \in \theta(M)$ دراین صورت عضو (C, D) از $\theta(M)$ را یک θ-زوج نرمال گوییم. بهاتاچاریا و موخرجی ثابت نمودند که اگر M زیرگروه بیشینی از G باشد آنگاه $\theta(M)$ ناتهی است (Mukherjee, Bhattacharya,1990) . مجموعه تمام θ-زوج‌های بیشین وابسته به M را با $\theta_{max}(M)$ و مجموعه تمام θ-زوج‌های بیشین G را با $\theta_{max}(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف۲: گروه G را $n\theta$- بیشین نامیم هرگاه $|\theta_{max}(G)| = n$. همچنین G را $n\theta$-زوج گوییم هرگاه $|\theta(G)| = n$.

در مرجع فوق‌الذکر ثابت شده است که اگر M یک زیر گروه بیشین G ، (C, D) یک عضو بیشین $\theta(M)$، $N \lhd G$ و $N \subset D$ باشد آنگاه $\left(\frac{C}{N}, \frac{D}{N}\right)$ یک θ-زوج بیشین از $\theta\left(\frac{M}{N}\right)$ خواهد بود. بعکس اگر $\left(\frac{C}{N}, \frac{D}{N}\right)$ یک θ-زوج بیشین از $\theta(M)$ باشد آنگاه (C, D) یک θ-زوج بیشین از $\theta(M)$ است. به سادگی می‌توان دید که اگر به ازای $(A, B), (C, D) \in \theta(M)$

داشته باشیم $(A,B)\le(C,D)$ آنگاه $B\le D$. ژائویائوکیینگ ثابت کرد که اگر M زیرگروه بیشین ازG و (S,T) یک θ-زوج نرمال وابسته به M باشد، دراین صورت $\theta(M)$ دارای θ-زوج نرمال بیشین (A,B) خواهد بود به طوری که $(S,T)\le(A,B)$ و $\frac{S}{T}\cong\frac{A}{B}$.
بعلاوه وی نشان‌داده است که اگر M یک زیر گروه بیشین G و (A, B)، θ-زوج نرمال بیشنی از $\theta(M)$ باشد آنگاه $B= Core_G M$ (Zhao, 1995).

فرض کنیم m(G) معرف تعداد زیرگروه های بیشین G باشد. بنابر نتیجه‌ای کلاسیک در نظریه گروه ها، ۱ = m(G) اگر و تنها اگر G گروهی دوری از مرتبه توانی ازیک عدد اول باشد (Huppert, 1967). خزعل نتیجه فوق را تعمیم داده وثابت کرده است که ۲ = m(G) اگرو تنها اگر G گروهی دوری‌از مرتبه p^aq^b باشد که p وq اعدادی اول و a وb اعدادی طبیعی هستند.

در سراسر مقاله G گروهی متناهی و $\phi(G)$ معرف زیر گروه فراتینی G است. نمادها ومفاهیم اصلی مقاله از مراجع برداشته شده است.

۲- نتایج و قضایای اصلی

همانطور که در بخش قبل اشاره شده هدف مقاله مطالعه زیرگروه های دقیقاً با n، θ-زوج می‌باشد. در قضیه زیر برای حالت n=۱ این گروه‌ها را کاملاً مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱: گروه G ، 1θ-زوج است اگرو تنها اگر دوری از مرتبه توانی از یک عدد اول باشد.

اثبات. فرض کنیم G ، 1θ-زوج باشد دراین صورت G ، 1θ-بیشین خواهد بود. ثابت می‌کنیم $\frac{G}{\phi(G)}$ ساده است فرض کینم $\theta_{\max}(G)=\{(C,D)\}$. اگر $C\ne G$ آنگاه زیر گروه بیشینی مانندM می‌توان یافت که $C\subseteq M$. چون $(C,D)\in\theta_{\max}(M)$ لذا $G=\langle M,C\rangle=M$ که ناممکن است. از این رو C = G و(G,D) یک θ-زوج نرمال بیشین خواهد بود. حال بنا بر نتیجه ژائو که قبلاً ذکرشد$D=M_G$ و برای هرزیر گروه بیشین K از G داریم $D=K_G$. بنابراین $D=\phi(G)$ و بنابرتعریف ۱، $\frac{G}{\phi(G)}$ ساده است. حال فرض کنیم $m(G)>1$. دراین صورت $\phi(G)$ زیر گروه بیشینی از G نیست و لذا برای هر زیرگروه بیشین M ازG ، $(M,\phi(G))\in\theta(L)$ که در آن L زیرگروه بیشین ازG ومتمایز با M است. اما

$\left(G,\phi(G)\right)\in\theta(L)$ و لذا G=M که تناقض است .لذا m(G)=۱ و بنابراین G گروهی دوری از مرتبه توانی از یک عدد اول است. بعکس، اگر G دوری از مرتبه توانی از یک عدد اول باشد آنگاه تنها یک زیرگروه بیشین مانند M دارد. حال بوضوح (G,M) تنها θ-زوج G بوده وحکم برقراراست.

قضیه ۲: فرض کینم G یک گروه باشد. در این صورت G ، 1θ-بیشین است اگر و تنها اگر زیر گروه بیشینی مانند M از G وجود داشته باشد به طوری که $\theta_{\max}(M)=\theta_{\max}(G)$.

اثبات. فرض کنیم $\left|\theta_{\max}(G)\right|>1$ و M زیر گروه بیشینی از G باشد به طوری که $\theta_{\max}(M)=\theta_{\max}(G)$. همچنین (A,M_G) را θ-زوج نرمال بیشین وابسته به M درنظر می‌گیریم. اگر $A\neq G$ آنگاه $\frac{G}{A}$ شامل θ-زوج نرمال بیشین $\left(\frac{R}{A},\frac{T_G}{A}\right)$ وابسته به زیر گروه بیشین $\frac{T}{A}$ از $\frac{G}{A}$ است. لذا طبق لم ۲.۱ از (Mukherjee and Bhattacharya, 1990)، (R,T_G) θ-زوج نرمال بیشینی از G است. پس $(R,T_G)\in\theta_{\max}(M)$ و بنابراین $T_G=M_G$. حال چون $A<R$ لذا $(A,M_G)<(R,M_G)$ که متناقض با بیشین بودن (A,M_G) است. از اینرو $A=G$. از طرف دیگر برای هر زیرگروه بیشین دلخواه K از G ، $K_G=M_G$ ، بنابراین $\phi(G)=M_G$ و $(A,M_G)=\left(G,\phi(G)\right)$. درنتیجه $\frac{G}{\phi(G)}$ ساده است. بنابراین برای هر زیرگروه بیشین K از G ، $\left(G,\phi(G)\right)\in\theta_{\max}(K)$. حال فرض کنیم (C,D) ، θ-زوج بیشین دلخواهی وابسته به زیرگروه بیشین X از G باشد. چون $\left(G,\phi(G)\right)\in\theta_{\max}(K)$ لذا $(C,D)\leq\left(G,\phi(G)\right)$ که خلاف بیشین بودن (C,D) است. لذا C=G و $D\leq\phi(G)$. چون (G,D)، یک θ-زوج نرمال بیشین است، لذا طبق قضیه ذکر شده از ژائو $D=X_G$. بنابراین $\phi(G)\subseteq X_G\subseteq\phi(G)$، یعنی $D=X_G=\phi(G)$ و $\left(G,\phi(G)\right)$ تنها θ-زوج بیشین G خواهد بود. مطلب اخیر نشان می‌دهد که $\left|\theta_{\max}(G)\right|=1$ و این تناقض است. بنابراین G ، $1\theta-$بیشین است. لزوم حکم به طور بدیهی برقرار است.

قضیه۳: فرض کنیم G گروهی دلخواه و M زیرگروه بیشینی از G باشد به طوری که $\theta(M)=\theta(G)$. در این صورت G، 1θ-زوج است.

اثبات. بنابر قضیه ۲، G، 1θ-بیشین است و مانند آنچه در اثبات قضیه ۱ گفته شد می‌توان نشان داد $\frac{G}{\phi(G)}$ ساده است. اگر $m(G)>1$ و M و L دو زیر گروه بیشین متمایز از G

باشــند، آنگــاه $(L,\phi(G))\in\theta(M)$ و $(M,\phi(G))\in\theta(L)$ کــه تنــاقض اســت. بنــابراین m(G)=۱ و لذا طبق قضیه۱، G ، 1θ-زوج است.

لم۱: فرض کنیم G گروهی دوری از مرتبه $p_1^{r_1}.p_2^{r_2}...p_n^{r_n}$ باشد که درآن $p_1,...,p_n$ اعدادی اول هســتند. بعــلاوه فــرض کنــیم n>1 و $p_1<p_2<\cdots<p_n$. اگــر $m=|\theta(G)|$ درایــن صــورت m > n.

اثبات. فرض کنیم M_1،M_2،…،M_n تمامی زیر گروه‌های بیشین G باشند. درایــن صــورت بــه ازای $1\le i\le n$ ، $(G,M_i)\in\theta_{\max}(M_i)$. بنابراین G ، حداقل دارای n ، θ-زوج است. حال فرض کنیم M و L زیر گروه های بیشینی ازG بترتیب با اندیس های p_1 و p_2 باشند. همچنین A زیرگــروه بیشــینی از M بــا انــدیس P_2 باشــد. دراینصــورت بــه راحتــی مــی‌تــوان دیــد $(M,A)\in\theta(L)$. بنابراین m > n و اثبات کامل است.

قضیه ۴: گروهی دقیقاً با دو θ-زوج وجود ندارد.

اثبات. فرض کنیم G، گروهی 2θ-زوج باشد. با توجه به قضیه ۳، زیرگــروه بیشــینی ماننــد M ازG وجود ندارد به طوری‌که $\theta(M)=\theta(G)$. بنابراین G، 2θ- بیشین اسـت. فـرض کنـیم (A,B) و (C,D) دو θ-زوج بیشــین متمــایز از $\theta_{\max}(G)$ باشــند بــه‌طــوری کــه $\theta_{\max}(M)=\{(A,B)\}$ و $\theta_{\max}(L)=\{(C,D)\}$. با توجه به قضیه‌ای از ژائو کـه قـبلاً ذکـر شد، $A\lhd G$ و $C\lhd G$. حال ثابت می‌کنیم A=G یـا C=G . فـرض کنـیم چنـین نباشـد. گروه‌های $\frac{G}{A}$ و $\frac{G}{C}$ را در نظر مـی‌گیـریم. فـرض کنـیم $\left(\frac{R}{A},\frac{T}{A}\right)$، θ-زوج نرمـال بیشـین وابسته به زیر گروه بیشینی از $\frac{G}{A}$ و $\left(\frac{U}{C},\frac{V}{C}\right)$، θ-زوج نرمال بیشین وابســته بــه زیــر گــروه بیشینی از $\frac{G}{C}$ باشند. در اینصورت (R,T) و (U,V) ، θ- زوج‌های بیشین G خواهند بود. چون $A\subset_{\neq}R$ لـــذا $(A,B)\neq(R,T)$ و از اینـــرو (A,B)=(U,V) . لـــذا (C,D)=(R,T) و $R=C$ $A\subset_{\neq}$ $U=A$ $C\subset_{\neq}$ کـه تنـاقض اسـت. بنـابراین A=G یـا C=G. در ادامـه ثابـت می‌کنیم $|\{X_G \ |X< G\}|=2$. چون G ، 2θ-بیشین است لذا $B=M_G$ و $D=L_G$. فرض کنیم K زیرگروه بیشین دلخواهی از G باشد. چون $\theta(K)$ مخـالف تهـی اسـت، حـداقل یـک θ- زوج نرمال بیشین خواهد داشت. اگر $(A,M_G)\in\theta(K)$ آنگاه $K_G=M_G$ و در صورتی‌که $(G,L_G)\in\theta(K)$ آنگاه $K_G=L_G$. بنابراین $K_G=M_G$ یا $K_G=L_G$. ولی این ایجاب می‌کند کـه

$\left|\left\{T_G \middle| T <\cdot G\right\}\right| \leq 2$، آنگاه برای هر دو زیرگروه بیشین R و S از G، خواهیم داشت $R_G=S_G$. اگر $\left|\left\{T_G \middle| T <\cdot G\right\}\right| = 1$. بنابراین $\phi(G)=M_G=L_G$. اگر $A \neq G$، آنگاه C=G و $\frac{G}{L_G}=\frac{G}{M_G}$ ساده است. ولی $\frac{G}{M} \rhd \frac{A}{M_G} \neq 1$ و این تناقض است. اگر A=G، آنگاه (A,B)=(G,M_G)، (C,D)=(G,L_G) و $M_G=L_G$، از این‌رو (C,D)= (A,B) که این نیز یک تناقض است. بنابراین $\left|\left\{T_G \middle| T <\cdot G\right\}\right| = 2$. لذا فرض کنیم (C,$L_G$) و (G,$M_G$) دو θ-زوج بیشین متمایز وابسته به زیرگروه‌های بیشین L و M از G باشند. ثابت می‌کنیم G دقیقاً دو زیرگروه بیشین دارد. فرض کنیم T زیرگروه بیشین دیگری از G باشد. اگر $C \neq G$، آنگاه زیرگروه بیشین X از G وجود دارد که $C \leq X_G$. لذا $X_G=M_G$ یا $X_G=L_G$. چون $X_G \neq L_G$ بنابراین $X_G=M_G$ ودر نتیجه $L_G \leq C \leq M_G$. بنابراین $\phi(G)=L_G$. ادعا می‌کنیم $(L,\phi(G)) \in \theta(T)$. ابتدا $G=\langle L,T\rangle$ و $\phi(G) \leq T$. همچنین اگر $\frac{L}{\phi(G)}$ شامل زیرگروه نرمال سره نابدیهی $\frac{K}{\phi(G)}$ از $\frac{G}{\phi(G)}$ باشد آنگاه $\phi(G) \subset_{\neq} K$ و $K \subseteq L$ لذا $K \subseteq L_G$. حال $\phi(G) \subset_{\neq} K \subseteq \phi(G)$ که تناقض است. لذا $(L,\phi(G)) \in \theta(T)$ که این نیز ناممکن است. بنابراین فرض می‌کنیم C = G. لذا $\frac{G}{L_G}$ و $\frac{G}{M_G}$ هردو ساده هستند. چون $\left|\left\{X_G \middle| X <\cdot G\right\}\right| = 2$ لذا $T_G=M_G$ یا $T_G=L_G$. اگر $T_G=L_G$ آنگاه $(L,L_G) \in \theta(T)$ که ناممکن است. همچنین اگر $T_G=M_G$ آنگاه $(M,M_G) \in \theta(T)$، زیرا در این حالت G، ۱θ- زوج می‌شود. بنابراین G دقیقاً دو زیرگروه بیشین دارد و لذا G دوری و مرتبه آن دقیقاً به دو عدد اول بخش‌پذیر است. حال با توجه به لم ۱، حکم اثبات می‌شود.

قضیه۵: برای n ≠ ۲, ۳ گروهی با دقیقاً n، θ-زوج وجود دارد.

اثبات. اگر n=۱، آنگاه بنابر قضیه۱، حکم برقرار است. حال فرض می‌کنیم n > ۱ و قرار می‌دهیم $G=Z_{p^nq}$. دراینصورت G دارای دقیقاً دو زیر گروه بیشین M وN به ترتیب از مرتبه‌های p^n و $p^{n-1}q$ است. حال اگر به ازای $0 \leq i \leq n$، A_i و B_i زیرگروه‌های G به ترتیب از مرتبه‌های p^i و p^iq باشند به راحتی می‌توان دید که $\theta(M)=\left\{(B_i,A_i) \middle| 0 \leq i \leq n\right\}$ و $\theta(N)=\left\{(A_n,A_{n-1}),(B_n,B_{n-1})\right\}$. بنابراین G دقیقاً n+۳، θ-زوج دارد و حکم ثابت می‌شود.

References

Ballester-Bolinches, A., and Zhao Y., (1996) *On maximal subgroups of finite groups and theta paris*, Comm. in Algebra **24(13)**, 4199-4209.

Deskins, W.E., (1959) *On Maximal subgroups. Proc. Sympos. Pure Math.* Vol. 1, Amer.Math.Soc.Providence, R. I., 100-104.

Huppert, B., (1967) *Endliche Gruppen,* Springer-Verlag, Berlin.

Khazal, R.R., (1989) *A note on minimal and maximal subgroups in a finite group,* J. Univ. Kuwait (Sci.), **16**, 229-235.

Mukherjee, N.P., and Bhattacharya, P., (1990) *On theta pairs for a maximal subgroup of a finite group*, Proc. Amer. Math. Soc., **109,** 589-596.

Soleimani, R., (2000) *On the number of maximal* θ *- pairs in a finite group*, M.Sc. Thesis, University of Kashan.

Zhao Y., (1995) *On theta pairs for maximal subgroups,* Comm. in Algebra, **23(6),** 2099-2106.