

مدهای الکترومغناطیسی تحریک شده در لیزر الکترون آزاد با هندسه دورانی

مجتبی (فرزین) آقامیر

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران

(دریافت: ۸۰/۷/۳۰؛ پذیرش: ۸۱/۲/۴)

چکیده

در این مقاله امواج الکترومغناطیسی تولید شده در یک لیزر الکترون آزاد با هندسه دورانی بررسی شده است. در این مدل در اثر عبور یک پرتو الکترونی دورانی در فضای داخل یک موجبر هم محور که در آن میدان مغناطیسی Wiggler اعمال شده مدهای الکترومغناطیسی تحریک می شوند. معادله پاشندگی برای مدهای مغناطیسی عرضی محاسبه شده است. از بررسی محتوی معادله پاشندگی چنین حاصل می شود که ناپایداری ها در حوالی فرکانس هایی رشد می کنند که محل تلاقی مدهای پرتو الکترونی و مدهای موجبر است.

واژه های کلیدی: لیزر الکترون آزاد، میدان Wiggler، معادله پاشندگی

مقدمه

لیزرهای الکترون آزاد منابعی هستند که قابلیت تولید امواج الکترومغناطیسی با توانهای بالا را دارا می‌باشند. این نوع لیزر را می‌توان از محدوده فرسرخ تا مرئی و حتی فرابنفش کوک کرد. در سالهای اخیر به سبب کاربردهای بی‌شمار، مطالعات تجربی و تئوری فراوانی بر روی لیزرهای الکترون آزاد با هندسه خطی انجام شده است (Sprangle & Smith, 1979) (Freund & Antonsen, 1996). تابش این لیزر در اثر فرآیند برهم کنش یک پرتو الکترونی با میدان مغناطیسی متناوبی که اصطلاحاً آن را Wiggler می‌نامند صورت می‌پذیرد. اگر پرتو الکترونی بجای آن که در راستای محور معینی تابیده شود حول محور دوران کند و میدان Wiggler بصورت سمتی حول محور متناوب باشد یک لیزر الکترون آزاد با هندسه دورانی خواهیم داشت (Mizuno, et. al., 1996). مزایای این نوع لیزر در مقایسه با نوع خطی آن عبارتند از طولانی بودن مسیر برهم کنش الکترونها، جمع و جور بودن لیزر، و باز برخورد (feedback) داخلی آن که از چرخش مجدد امواج الکترومغناطیسی حاصل میشود. در این مقاله مدهای امواج الکترومغناطیسی تابشی در این نوع لیزر بررسی شده است. در ادامه بحث ابتدا هندسه مسئله توضیح داده شده، سپس معادلات حاکم بر رفتار پرتو الکترونی و امواج الکترومغناطیسی مشخص شده و در انتها با استفاده از این معادلات معادله پاشندگی محاسبه شده و نهایتاً مدهای تولید شده مشخص شده است.

حرکت الکترونها در میدانهای مغناطیسی محوری و میدان Wiggler

در تجزیه و تحلیل لیزر الکترون آزاد با هندسه دورانی فرض بر این است که پرتو الکترونی حلقه ای است به شعاع r_0 ، بی نهایت طویل، با ضخامت بسیار ناچیز که عملاً استوانه ای را می‌سازد که در فضای بین دو استوانه فلزی هم محور به شعاع های r_i و r_o در راستای محور در حال چرخش است. به منظور این که پرتو الکترونی در فضای بین دو استوانه داخلی و خارجی محصور شود میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B_0 \hat{a}_z$ را در راستای محور موجبر هم محور اعمال می‌کنیم. علاوه بر میدان یاد شده میدان Wiggler که بطور سمتی متناوب است را نیز بر پرتو الکترونی اعمال می‌کنیم. این میدان در نزدیکی وسط فضای بین دو استوانه داخلی و خارجی تنها مؤلفه شعاعی غالب خواهد داشت که بر راستای حرکت الکترونها عمود است. الکترونها بلافاصله بعد از خارج شدن از کاتد تنها مؤلفه سرعت V_{z1} را در راستای محور خواهند داشت، با اعمال یک میدان مغناطیسی CUSP (Destler, et. al., 1975)، الکترونها

شروع به چرخش حول محور خواهند کرد و در نتیجه مؤلفه سمتی سرعتی را نیز بدست خواهند آورد که با سرعت قبل از ورود به میدان رابطه زیر را دارا می باشند.

$$V_{z1}^2 = V_{z2}^2 + V_{\theta 2}^2 = V_{z2}^2 + r_b^2 \Omega_z^2 \quad (1)$$

در رابطه فوق V_{z2} مؤلفه سرعت الکترونها در راستای محور بعد از اعمال میدان مغناطیسی و

r_b شعاع پرتو الکترونی و $\Omega_z = \frac{eB_z}{m_0 c \gamma}$ فرکانس سیکلوترونی نسبیتی الکترونها است.

چنانچه میدان مغناطیسی افزایش یابد و به مقدار

$$B_{zC} = \frac{V_{z1} m_0 \gamma_0 c}{e r_b} \quad (2)$$

نزدیک شود سرعت محوری الکترونها تقلیل یافته و مدارهای مارپیچی که الکترونها بر روی آنها حرکت می کنند فشرده تر می شود. میدان فوق را می توان میدان قطع نامید که در این مقدار

ذرات فاقد مؤلفه سرعت در راستای محورند. پس می توان نوشت: $V_{\theta} = r_b \Omega_z$

با اعمال میدان Wiggler و حضور میدان مغناطیسی محوری و با توجه به این که در فضای

بین دو استوانه داخلی و خارجی $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ و $\nabla \times \vec{B} = 0$ میدان را می توان بصورت زیر نوشت

$$\vec{B} = \hat{a}_r \frac{B_{ow}}{2} \cos(N\theta) \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^{N-1} + \left(\frac{r_i}{r} \right)^{N+1} \right] \left[\frac{r_0}{r_i} \right]^{\frac{N^2-1}{2N}} \quad (3)$$

$$- \hat{a}_{\theta} \frac{B_{ow}}{2} \sin(N\theta) \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^{N-1} - \left(\frac{r_i}{r} \right)^{N+1} \right] \left[\frac{r_0}{r_i} \right]^{\frac{N^2-1}{2N}} + \hat{a}_z B_z$$

در رابطه فوق \hat{a}_r و a_{θ} و \hat{a}_z به ترتیب بردارهای یک شعاعی، سمتی و محوری،

و خارج و B_{ow} عبارت است از اندازه دامنه مؤلفه شعاعی میدان در فاصله $N = \frac{\pi(r_0 + r_i)}{l}$ تعداد تناوب سمتی، l تناوب خطی در وسط فضای بین دو هادی داخل

در نتیجه ملاحظه می شود که نزدیک به وسط ناحیه بین هادی داخلی و خارجی میدان

مغناطیسی شعاعی است و نیروی $\vec{V} \times \vec{B}$ در راستای محور Z خواهد بود که درست مشابه با

$$r = (r_0^{N-1} r_i^{N+1})^{1/2N}$$

حرکت عرضی الکترونها در FEL های خطی است. چنانچه شعاع حلقه الکترونی r_b را با شعاع r برابر فرض کنیم رابطه (۳) بصورت زیر بیرون می آید.

$$\vec{B} = \hat{a}_r B_{\omega} \cos N\theta + \hat{a}_z B_z \quad (۴)$$

و از طرف دیگر چنانچه فرض کنیم که فرکانس سیکلوترونی مربوط به میدان Wiggler،

$$\Omega_{\omega} = \frac{eB_{\omega}}{m_0 c \gamma_0}$$

بسیار کوچکتر از N برابر فرکانس سیکلوترونی میدان محوری اعمال شده،

$$\Omega_z = \frac{eB_z}{m_0 c \gamma_0} \quad \text{باشد} \quad \left(\frac{\Omega_{\omega}}{N\Omega_z} \ll 1 \right)$$

معادلات حرکت الکترونها در غیاب میدانهای

اختلالی را می توان به صورت زیر نوشت :

$$r_b \dot{\theta} = r_b \Omega_z \quad (۵)$$

$$\dot{Z} = c \beta_{\theta} \frac{\Omega_{\omega}}{N\Omega_z} \sin(N\Omega_z t)$$

و در عین حال

$$r = r_0$$

$$\theta = \Omega_z t \quad (۶)$$

$$Z = \frac{1}{N} r_b \frac{\Omega_{\omega}}{N\Omega_z} (1 - \cos(N\Omega_z t))$$

که در روابط فوق

$$\beta_{\theta} = \frac{V_{\theta}}{C} \quad \text{و} \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\theta}^2}}$$

و برای محاسبه معادلات حرکت ، حلقه الکترونی بسیار باریک فرض شده و از اثر میدانهای حلقه الکترونی بر روی خود چشمپوشی شده است.

در حضور میدانهای الکترومغناطیسی معادله حاکم بر حرکت الکترونها را می توان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{e}{m_0 \gamma} \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} (\vec{V} \cdot \vec{E}) \vec{V} \right] \quad (۷)$$

که در رابطه فوق

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{V}_0 + \vec{V}_1 \\ \vec{E} &= \vec{E}_1 \\ \vec{B} &= \vec{B}_{0z} + \vec{B}_{0\omega} + \vec{B}_1\end{aligned}$$

و مقادیر تعادلی با اندیس صفر و مقادیر اختلالی با اندیس یک بیان شده است. با خطی نمودن معادله فوق به روابط زیر می رسیم.

$$\begin{aligned}\ddot{r}_1 - c\beta_{0\theta}\gamma_0^2\dot{\theta}_1 - \beta_{0\theta}^2\Omega_z^2\gamma_0^2r_1 - \gamma_0^2\beta_{0\theta}^2\frac{\Omega_\omega}{N}\sin(N\theta)\dot{Z}_1 \\ = -\frac{e}{m_0\gamma_0}\left[E_{1r} + \beta_{0\theta}B_{1z} - \beta_{0\theta}\frac{\Omega_\omega}{N\Omega_z}\sin(N\theta)B_{1\theta}\right]\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}r_b\ddot{\theta}_1 + \Omega_z\dot{r}_1 + \Omega_\omega\cos(N\theta)\dot{Z}_1 \\ = -\frac{e}{m_0\gamma_0}\left[\frac{E_{1\theta}}{\gamma_0^2} + \beta_{0\theta}\frac{\Omega_\omega}{N\Omega_z}\sin(N\theta)B_{1r} - \beta_{0\theta}^2\frac{\Omega_\omega}{N\Omega_z}\sin(N\theta)E_{1z}\right]\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\ddot{Z}_1 + \gamma_0^2\beta_{0\theta}^2\Omega_z\Omega_\omega\cos(N\theta)r_1 + c\beta_{0\theta}\frac{\Omega_\omega}{\Omega_z}(\gamma_0^2\beta_{0\theta}^2 - 1)\cos(N\theta)\dot{\theta}_1 \\ = -\frac{e}{m_0\gamma_0}\left[E_{1z} - \beta_{0\theta}B_{1r} - \beta_{0\theta}^2\frac{\Omega_\omega}{N\Omega_z}\sin(N\theta)E_{1\theta}\right]\end{aligned}\quad (10)$$

معادله پاشندگی:

دو استوانه داخلی و خارجی که در فضای بین آن دو پرتو الکترونی با ضخامت و چگالی بسیار کم در حال چرخش است را می توان به عنوان موجبری هم محور که مدهای آن تقریباً همان مدهای TE و TM موجبر هم محور تو خالی است در نظر گرفت.

حرکت نوسانی الکترونها به سبب وجود میدان $Wiggler$ که در راستای محور می باشد به مدهای TE موجبر جفت نخواهد شد زیرا مدهای TM هستند که مؤلفه میدان الکتریکی در

راستای محور دارند. تحت شرایطی که پرتو الکترونی مؤلفه سرعت بسیار کوچکی در راستای z داشته باشد به عبارت بهتر در شرایط قطع، که در آن عدد موج $k_z = 0$ می باشد معادله پاشندگی را برای مدهای TM محاسبه می کنیم. در این شرایط آهنگ رشد ناپایداری لیزر الکترون آزاد بیشترین مقدار را خواهد داشت. در نتیجه میدانهای اختلالی را می توان به شرح زیر نوشت

$$E_{1z} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l [J_l(k_c r) N_l(k_c r_0) - J_l(k_c r_0) N_l(k_c r)] e^{i(l\theta - \omega t)} \quad (11)$$

$$B_{1r} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l \frac{1}{k_c} l \frac{\omega}{c} \frac{1}{r} [J_l(k_c r) N_l(k_c r_0) - J_l(k_c r_0) N_l(k_c r)] e^{i(l\theta - \omega t)} \quad (12)$$

$$B_{1\theta} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i C_l \frac{1}{k_c} \frac{\omega}{c} [J'_l(k_c r) N_l(k_c r_0) - J'_l(k_c r_0) N'_l(k_c r)] e^{i(l\theta - \omega t)} \quad (13)$$

و بقیه مؤلفه های میدانهای اختلالی برابر صفرند.

در روابط فوق C_l ثابتی است متناسب با دامنه موج، J_l و N_l به ترتیب تابع بسل از نوع اول و دوم، $k_c(l, m)$ عدد موج در شرایط قطع است که آنرا می توان از رابطه زیر محاسبه نمود.

$$J_l(k_c r_i) N_l(k_c r_0) - J_l(k_c r_0) N_l(k_c r_i) = 0 \quad (14)$$

از طرفی فرکانس قطع را می توان از رابطه

$$\omega_c(l, m) = c k_c(l, m)$$

بدست آورد که در این رابطه l و m به ترتیب اعداد مُد سمتی و شعاعی می باشند.

بدین ترتیب تمام مؤلفه های میدانهای TM در موجبر را می توان از معادله موج که برای مؤلفه محوری میدان الکتریکی بصورت زیر نوشته می شود محاسبه کرد

$$(\omega^2 - c^2 k_c^2) E_{1z} = -i 4\pi \omega J_{1z} \quad (15)$$

در اینجا J_{1z} چگالی جریان حلقه الکترونی در $r = r_b$ است که توسط رابطه ای بشکل زیر محاسبه شده است. (Sprangle, 1976)

$$J_{1z} = \sigma_0 \delta(r - r_b) V_{1z} - \sigma_0 \delta'(r - r_b) r_1 V_z + \sigma_1 \delta(r - r_b) V_z \quad (16)$$

در اینجا σ_0 ، σ_1 به ترتیب چگالی سطحی اختلالی و بدون اختلال، δ تابع دلتا دیراک؛ و $\delta'(r) = \frac{\partial \delta(r)}{\partial r}$ می باشد. رابطه بین چگالی سطحی اختلالی و چگالی سطحی بدون

اختلال را می توان بصورت زیر نوشت. (Sprangle, 1976)

$$\sigma_1 = -\sigma_0 \left[\frac{r_1}{r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta} \right] \quad (17)$$

حال اگر کمیت های اختلالی مانند r_1 ، θ_1 ، z_1 و مشتقات زمانی آنها را مانند مؤلفه های اختلالی میدانها بسط دهیم بطوری که وابستگی زمانی و سمتی آنها متناسب با $e^{i(l\theta - \omega t)}$ باشد با چابگری آنها در معادله موج به معادله پاشندگی می رسیم

$$\begin{aligned} & (\omega - (l+N)\Omega_z)^2 \left[(\omega - (l+N)\Omega_z)^2 - \Omega_z^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Omega_\omega^2 (\beta_{\omega}^2 \gamma_\omega^2 - 1)}{(\omega - l\Omega_z)(\omega - (l+2N)\Omega_z)} \right) - \frac{1}{2} \frac{\Omega_\omega^2 \Omega_z^2}{(\omega - l\Omega_z)(\omega - (l+2N)\Omega_z)} \right] \\ & \times \left[\omega^2 - c^2 k_c^2 - \frac{1}{4} \frac{\omega \omega_p^2 r_b^2}{(\omega - l\Omega_z)(K_l(k_c r_o) - K_l(k_c r_i))} \left(\frac{l\omega \beta_{\omega} \theta}{k_c^2 r_b c} - 1 \right) (J_l(k_c r_b) N_l(k_c r_o) - J_l(k_c r_o) N_l(k_c r_b))^2 \right] \\ & = f(r_b, \dot{\theta}, \omega) \end{aligned} \quad (18)$$

که در این رابطه $K_l(k_c r_o)$ و $K_l(k_c r_i)$ به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} K_l(k_c r_o) = & \frac{r_o^2}{2} \left[N_l'^2(k_c r_o) \left(J_l'^2(k_c r_o) + \left(1 - \frac{l^2}{k_c^2 r_o^2} \right) J_l'^2(k_c r_o) \right) \right. \\ & \left. + J_l'^2(k_c r_o) \left(N_l'^2(k_c r_o) + \left(1 - \frac{l^2}{k_c^2 r_o^2} \right) N_l'^2(k_c r_o) \right) \right. \\ & \left. - 2N_l'(k_c r_o) J_l'(k_c r_o) J_l'(k_c r_o) N_l'(k_c r_o) + \left(1 - \frac{l^2}{k_c^2 r_o^2} \right) J_l(k_c r_o) N_l(k_c r_o) \right] \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} K_l(k_c r_i) = & \frac{r_i^2}{2} \left[N_l'^2(k_c r_o) \left(J_l'^2(k_c r_i) + \left(1 - \frac{l^2}{k_c^2 r_i^2} \right) J_l'^2(k_c r_i) \right) + \right. \\ & \left. J_l'^2(k_c r_o) \left(N_l'^2(k_c r_i) + \left(1 - \frac{l^2}{k_c^2 r_i^2} \right) N_l'^2(k_c r_i) \right) - 2N_l'(k_c r_o) J_l'(k_c r_o) \right. \\ & \left. \left(J_l'(k_c r_i) N_l'(k_c r_i) + \left(1 - \frac{l^2}{k_c^2 r_i^2} \right) J_l(k_c r_i) N_l(k_c r_i) \right) \right] \end{aligned}$$

تابع f در طرف دست راست این معادله شامل مقادیر غیر خطی است و با تقلیل دامنه میدان *Wiggler* به سمت صفر میل می کند، در نتیجه با صفر قراردادن طرف راست معادله محتوی

امواج داخل موجبر را می‌توان شناخت. اولین جمله طرف دست چپ بیانگر مد "سینکرونس" (Sprangle, 1976) است که فرکانس آن با مقدار $N\Omega_z$ ارتقاء یافته است

$$\omega - (l + N)\Omega_z = 0$$

یا

$$\omega = (l + N)\Omega_z$$

دومین مد موجود مد سیکلوترون [۵] است که با صفر قراردادن عبارت داخل کروشه اول آشکار می‌شود. این مد نیز همانند مد سینکرونس دارای فرکانسی است که به اندازه $N\Omega_z$ ارتقاء یافته است.

$$(\omega - (l + N)\Omega_z)^2 = \Omega_z^2$$

یا

$$\omega = (l + N \pm 1)\Omega_z$$

بالاخره از صفر قرار دادن کروشه دوم محتوی سومین مد مشخص می‌شود. این مد بیانگر اختلالات الکترومغناطیسی است که تحت شرایط قطع بوجود آمده است. چنانچه فرکانس پلاسما ω_p کوچک باشد می‌توان از جمله سوم داخل کروشه در مقابل دو جمله اول صرفنظر کرد. در نتیجه تحت شرایط قطع امواج TM را خواهیم داشت که فرکانس آنها توسط رابطه زیر داده شده است

$$\omega = ck_c(l, m) = \omega_c(l, m)$$

می‌توان نشان داد که برهم کنش امواج الکترومغناطیسی با مد سیکلوترونی به ناپایداری نمی‌انجامد در حالی که برهم کنش امواج الکترومغناطیسی با مد سینکرونس موجب ناپایداری می‌گردد (Sprangle, 1976). حداکثر آهنگ رشد در فرکانس‌هایی که محل تلاقی دو مد الکترومغناطیسی و سینکرونس است رخ می‌دهد.

محاسبات عددی

اکنون معادله پاشندگی (معادله ۱۸) را برای عدد مد $m=1$ و برای مقادیر مختلط ω حل می‌کنیم. برای این منظور شعاع‌های هادی داخلی و خارجی موجبر هم محور به ترتیب $r_i = 5.38 \text{ cm}$ و $r_o = 6.51 \text{ cm}$ فرض شده و پرتو الکترونی در محلی که میدان Wiggler کاملاً شعاعی است دارای شعاع 6 cm است. از طرفی $N = 6$ ، $B_z = 1350 \text{ G}$ ، $B_{o\omega} = 1300 \text{ G}$ ، $\omega_p = 1.5 \times 10^9 \text{ sec}^{-1}$ و $\gamma_o = 4.9$ در نظر گرفته شده است. در

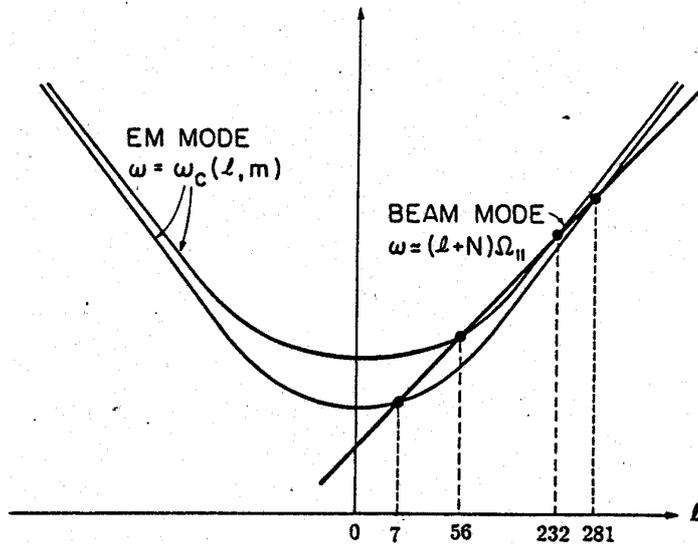
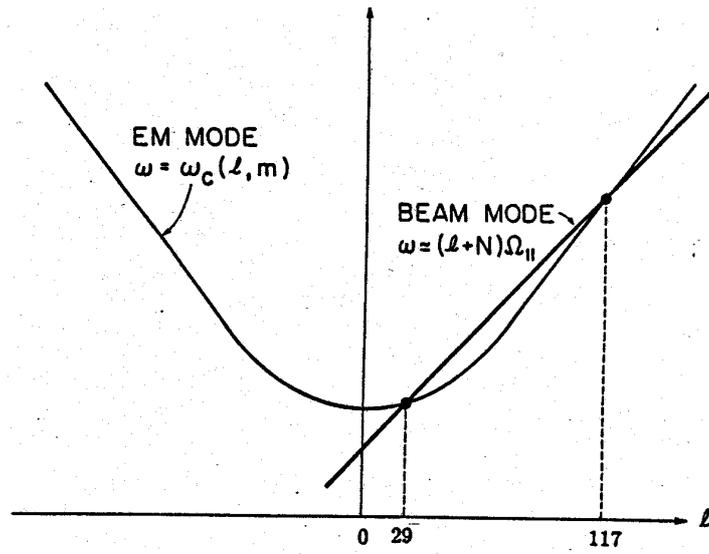
شکل (a) محل برخورد مد الکترومغناطیسی TM_{11} و مد سینکرونس نشان داده شده است. همانگونه که در شکل آشکار است برای $N = 6$ ، دو نقطه برخورد یکی برای عدد موج سمتی $\ell = 29$ و دیگری برای عدد موج $\ell = 117$ خواهیم داشت. این دو عدد موج مربوط به دو فرکانس برهم کنش مختلف می باشند. در آزمایشی تجربی که پارامترهای آن نزدیک به مقادیر فوق الذکر می باشند فرکانسی نزدیک به فرکانس مربوط به عدد موج $\ell = 117$ مشاهده شده است (Fuji, et. al. 2000).

برای حالت $N = 12$ محاسبات برای دو مقدار $m=1$ و $m=2$ تکرار شد. دو منحنی مربوط به موج TM و مد پرتو الکترونی اکنون ۴ محل تلاقی دارند شکل (b) که دو عدد موج کوچکتر منتهی به ناحیه فرکانس پائین می شوند و دو عدد موج بزرگتر به ناحیه فرکانس بالا مربوط اند. آهنگ رشد ناپایداری برای حالات فوق الذکر برای جریانی با چگالی $J_{\theta} = 1.1A\text{ cm}^{-2}$ که شرط ناچیز بودن ضخامت باریکه را ارضا می کند محاسبه شده و در جدول شماره (۱) همراه با فرکانس برهم کنش آورده شده است. بیشترین آهنگ رشد مربوط به حالتی است که در آن $\ell = 29$ است و تعداد تناوب میدان Wiggler برابر 6 است.

جدول ۱ - پارامترهای محاسبه شده برای پرتوی به شعاع $r_b = 6\text{ cm}$ و موجبر به شعاع های

$$r_o = 6.51\text{ cm} \text{ و } r_i = 5.38\text{ cm}$$

N	m	ℓ	$\frac{\omega}{2\pi}$ (GHZ)	$\omega_i \times 10^{-9}$ (Sec ⁻¹)
۶	۱	۲۹	۲۶/۸	۱/۰۲
۶	۱	۱۱۷	۹۴/۷	۰/۲۱
۱۲	۱	۷	۱۴/۶	۰/۴۸
۱۲	۱	۲۸۱	۲۲۵/۶	۱/۰۱۴
۱۲	۲	۵۶	۵۲/۳	۰/۱۵
۱۲	۲	۲۳۲	۱۸۷/۹	۰/۰۳۱



شکل (a): منحنی تغییرات فرکانس بر حسب عدد موج سمتی برای حالتی که در آن $N = 6$ است.

شکل (b): منحنی تغییرات فرکانس بر حسب عدد موج سمتی برای حالتی که در آن $N = 12$ است.

نتیجه گیری

در این گزارش مدهای الکترومغناطیسی که در اثر عبور یک پرتو الکترونی حلقوی طویل در فضای داخل یک موجبر هم محور که میدان مغناطیسی ویگلری در آن اعمال شده بررسی شد. حرکت دورانی پرتو الکترونی حول محور موجبر توسط میدان مغناطیسی *Wiggler* مختل شده و فرآیند این اختلال منجر به تحریک و رشد مدهای الکترومغناطیسی می گردد. تحت شرایط نزدیک به قطع معادله پاشندگی محاسبه شد. از بررسی محتوی معادله پاشندگی دریافتیم که سه گروه مد مغناطیسی عرضی، سیکلوترونی، و سینکرونس در فضای داخل موجبر تحریک می شوند. جفت شدگی مدهای موجبر، مد سینکرونس باعث ناپایداری می گردد که حداکثر رشد این ناپایداری در فرکانس هایی که محل تلاقی این دو مد است صورت می پذیرد.

References

- Sprangle, P.A., Smith, R.A. and Granatstein, V.L., (1979) *Infrared and Submillimeter waves*, edited by K. Button, Academic Press, New York, , Vol.1
- Freund, H.P., and Antonsen, T.M., (1996) *Principles of Free Electron Lasers*, Chapman and Hall, London.
- Mizuno, T., Otsuki, T., Ohshima, T., and Saito, H., (1996) *Single-Mode Operations of Circular Free Electron Laser*, Phys. Rev. Lett. 77, No. 13, 2686
- Destler, W.W., Misra, P.K., and Rhee, M.J., (1975) *Relativistic Electron Dynamics in a Cusped Magnetic Field with an Adiabatically varying downstream Drift Region*, Phys. Fluid 18, 1820
- Sprangle, P., (1976) *Excitation of Electromagnetic Waves from a Rotating Annular Relativistic e-beam*, J. Appli. Phys. 47, 2935
- Fuji, S., Mizuno, T., Ohshima, H., Kawai, M., and Saito, H., (2000) *Experimental study of submillimeter wave FEL with micro wiggler*, Nucl. Instr. and Meth., A445