مجله علوم دانشگاه تهران
جلد سی‌ام (۱۳۸۳) شماره ۱ (۳۱-۲۳)

بررسی روشهای عددی اویلر- ماریاما و میلشتاین برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی

قاسم برید لقمانی[۱]
محمود محسنی مقدم[۲]
[۱] *دانشکده ریاضی دانشگاه یزد*
[۲] *دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان*
(دریافت: ۷۹/۷/۲۴ ؛ پذیرش: ۸۱/۷/۲۹)

چکیده

برای مطالعه رفتار پدیده‌های فیزیکی معمولاً آنها را توسط معادلات دیفرانسیل مدلسازی می‌کنند. در بسیاری از این پدیده‌ها عواملی تصادفی دخالت دارند که باعث می‌شود تا این مدلسازی توسط معادلات دیفرانسیل تصادفی صورت گیرد. این عوامل تصادفی اغلب به شکل نوفهٔ سفید ظاهر می‌گردد. برای بررسی این معادلات معمولاً آنها را به شکل انتگرالی بیان می‌کنیم. اما جملهٔ انتگرالی مربوط به نوفه سفید با انتگرالهای ریمان و لبگ قابل محاسبه نمی‌باشد. برای رفع این مشکل نیاز به انتگرال ایتو می‌باشد. مسلماً تعداد زیادی از معادلات فوق حل تحلیلی ندارند و ناگزیر به استفاده از روشهای عددی برای حل آنها می‌باشیم. دراین مقاله سعی داریم تا با معرفی روشهای تقریبی اویلر- ماریاما و میلشتاین مسیر واقعی و تقریبی جواب را برای یک معادله از نوع فوق بررسی کنیم. چون فرآیند جواب این دسته از معادلات شامل فرآیند وینر می‌باشد و به شکل تابع مشخصی از زمان موجود نیست، مجبوریم مسیر جواب آنها را شبیه‌سازی کنیم. برای این کار نیاز به تولید اعداد تصادفی است و برای این منظور از مولدهای تولید اعداد شبه ـ تصادفی استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: *معادلات دیفرانسیل تصادفی، انتگرال ایتو، فرآیند وینر، نوفه سفید.*

معادلات دیفرانسیل تصادفی

نتیجهٔ اثرهای تصادفی در معادلات دیفرانسیل به دو کلاس مجزا از معادلات منجر می‌شود، معادلاتی که فرآیند جواب آنها مسیرهای نمونه مشتق‌پذیر یا مشتق ناپذیردارند.

دسته اول معادلات دیفرانسیل معمولی هستند که دارای ضرایب تصادفی یا یک مقدار اولیه تصادفی یا یک عامل اعمال شده بوسیله یک فرآیند تصادفی منظم یا ترکیبی از آنها می‌باشد. این دسته از معادلات را معادلات تصادفی نوع اول می‌نامیم و توسط مسیرهای نمونه معادلات دیفرانسیل معمولی حل‌پذیرند و مسیر نمونه فرآیند جواب در این حالت توابعی مشتق‌پذیر می‌باشند، به عنوان مثال معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی خطی

$$\dot{x} = \frac{d\chi}{dt} = a(\omega)\chi + b(t,\omega)$$

که فرآیند اعمال شده b نسبت به t برای هر ω پیوسته می‌باشد، برای یک مقدار اولیه $X_\circ(\omega)$ در $t = 0$ جواب توسط

$$X(t,\omega) = e^{a(\omega)t}\left(X_\circ(\omega) + \int_\circ^t e^{-a(\omega)s} b(s,\omega)ds\right)$$

داده می‌شود که مسیرهای نمونه آن به وضوح توابعی مشتق‌پذیر از t می‌باشند.

دسته دوم معادلاتی هستند که عامل اعمال شده یک فرآیند تصادفی نامنظم مثلاً نوفه سفیدگوسی می‌باشند که معادلات در این حالت توسط دیفرانسیلهای تصادفی بطور نمادین نوشته می‌شوند و توسط معادلات انتگرالی با انتگرالهای تصادفی ایتو یا استراتونویچ تفسیر می‌گردند که آنها را معادلات تصادفی نوع دوم می‌نامیم که در حالت کلی جواب آنها مشتق‌ناپذیری را از مسیرهای نمونه فرآیند وینر در انتگرالهای تصادفی به ارث می‌برند.

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل تصادفی نوع دوم اسکالر بصورت

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \qquad (۱-۱)$$

می‌باشد که می‌توان آن را بصورت معادلهٔ انتگرالی

$$X_t = X_{t_\circ} + \int_\circ^t a(s, X_s)ds + \int_\circ^t b(s, X_s)dW_s \qquad (۱-۲)$$

نیز در نظر گرفت، اکنون قصد داریم در وجود و منحصر بفردی جواب آن در ذیل بحث کنیم.

در پیدا کردن جوابهای معادله (۱-۱) بطور ضمنی فرض می‌کنیم که یک فرآیند وینر $\{W_t, t \geq 0\}$ از قبل برایمان مشخص شده است، اگر جوابها مستقل از فرآیند وینر باشند یعنی با تغییر فرآیند وینر یک جواب منحصر به فرد توسط همان فرمولها با فرآیند جدید بدست آید، چنین جوابهایی را برای معادلات دیفرانسیل تصادفی جواب قوی می‌نامیم و از

اصطلاح جواب ضعیف برای وقتی استفاده می‌کنیم که ما در انتخاب یک فرآیند وینر آزاد هستیم و سپس یک جواب، متناظر با این فرآیند وینر خاص پیدا می‌کنیم.

جواب معادلهٔ (۲-۱) می‌تواند به عنوان تابعی از مقدار اولیه X_{t_0} و مقادیر W_s از فرآیند وینر روی زیربازهٔ $t_0 \le s \le t$ درنظر گرفته شود. بدین ترتیب برای یک مقدار اولیه مشخص X_{t_0} جوابی از معادلهٔ (۱-۱) صادق در معادلهٔ (۲-۱) را انتخاب می‌کنیم.

اگر معادلهٔ انتگرالی تصادفی (۲-۱) دارای یک جواب قوی X_t باشد آنگاه دارای یک جواب معادل جدایی پذیر $\widetilde{X}_t$ می‌باشد که به طور تقریباً مطمئن مسیرهای نمونه پیوسته دارد، ما معمولاً این جواب را در نظر می‌گیریم.

اگر هر دو جواب X_t و $\widetilde{X}_t$ از نوع فوق بطور تقریباً مطمئن همان مسیرهای نمونه را روی $[t_0,T]$ داشته باشند. یعنی

$$P(\sup_{t_0\le t\le T}\left|X_t-\widetilde{X}_t\right|>0)=0$$

گوییم که جوابهای معادلهٔ (۱-۱) مسیروار منحصربفردند.

فرض کنیم برای ضرایب $a,b:[t_0,T]\times\Re\to\Re$ و مقدار اولیه X_{t_0} شرایط زیر برقرار باشند:

الف) اندازه پذیری: $a=a(t,x)$ و $b=b(t,x)$ برای هر $(t,x)\in[t_0,T]\times\Re$ تواماً L^2 - اندازه پذیر باشند.

ب) شرایط لیپ شیتس: یک ثابت $k>0$ چنان موجود باشد که برای هر $t\in[t_0,T]$ و $x,y\in\Re$ داشته باشیم:

$$|a(t,x)-a(t,y)|\le k|x-y|$$
$$|b(t,x)-b(t,y)|\le k|x-y|$$

ج) رشد خطی کران: یک ثابت $k>0$ چنان موجود باشد که برای هر $t\in[t_0,T]$ و $x,y\in\Re$ داشته باشیم:

$$|a(t,x)|^2\le k^2(1+|x|^2)$$
$$|b(t,x)|^2\le k^2(1+|x|^2)$$

د) مقدار اولیه: X_{t_0}، A_{t_0} - اندازه‌پذیر باشد و $E(\left|X_{t_0}\right|^2)<\infty$.

قضیه: تحت شرایط فوق معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$ دارای یک جواب قوی منحصر به فرد مسیری X_t روی $[t_\circ, T]$ با $\sup_{t_\circ \le t \le T} E(|X_t|^2) < \infty$ می‌باشد.

اثبات : (Kloeden and Platen,1995) .

تعداد زیادی از معادلات دیفرانسیل تصادفی حل تحلیلی ندارند و ناگزیر به استفاده از روشهای عددی (Burrage and Burrage,1996)، (Burrage and Platen,1994)، (Chang, 1987) و (Milstein,1995) برای حل آنها می‌باشیم، دراینجا به معرفی روشهای تقریبی اویلر-ماریاما و میلشتاین برای یک معادله از نوع فوق می پردازیم.

تقریبهای اویلر - ماریاما و میلشتاین

یکی از ساده‌ترین تقریب‌های گسسته زمان از یک فرآیند ایتو

$$X_t = X_{t_\circ} + \int_{t_\circ}^{t} a(s, X_s)ds + \int_{t_\circ}^{t} b(s, X_s)dW_s$$

تقریب اویلر- ماریاما می‌باشد. فرض کنیم فرآیند ایتو $X = \{X_t, t_\circ \le t \le T\}$ در معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

روی بازهٔ $t_\circ \le t \le T$ با یک مقدار اولیه $X_{t_\circ} = X_\circ$ صدق کند. برای یک افراز

$$t_\circ = \tau_\circ < \tau_1 < \ldots < \tau_n < \ldots \tau_N = T$$

از یک بازهٔ زمانی $[t_\circ, T]$ یک تقریب اویلر یک فرآیند تصادفی پیوسته زمان $Y = \{Y(t), t_\circ \le t \le T\}$ می‌باشد که در شکل تکراری

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n})$$

برای $n = 0,1,\ldots, N-1$ با مقدار اولیه $Y_\circ = X_\circ$ صادق می‌باشد، که منظور از $Y_n = Y(\tau_n)$ است. معمولاً قرار می‌دهیم $\Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ برای n امین نمو زمان و $\delta = \max_n \Delta_n$ را ماکزیمم طول گام می‌نامیم. اگر طول گامها مساوی باشد داریم

$\tau_n = t_\circ + n\delta$ جایی که $\delta = \Delta_n = \Delta = \dfrac{T - t_\circ}{N}$ می‌باشد.

دنبالهٔ $\{Y_n, n = 0,1,\ldots, N\}$ از مقادیر تقریب اویلردر زمانهای متساوی‌الفاصله $(\tau)_\delta = \{\tau_n, n = 0,1,\ldots, N\}$ می‌تواند مشابه روش اویلر محاسبه گردد با این تفاوت که در اینجا نیاز به تولید نمونه‌های تصادفی $\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$ برای $n = 0,1,\ldots, N-1$ از

فرآیند وینر $W = \{W_t \geq 0\}$ هستیم. اما این نمونه‌ها متغیرهای تصادفی گوسی مستقل با میانگین $E(\Delta W_n) = 0$ و واریانس $E((\Delta W_n)^2) = \Delta_n$ می‌باشند که می‌توان آنها را از یک دنباله از اعداد گوسی مستقل شبه ـ تصادفی مثلاً از روش باکس- مولر تولید کرد (Kloeden and Platen and Schurz,1994)و and Platen,1995).

بدین ترتیب مقادیر تقریبی فرآیند را در زمانهای گسسته تعیین می‌کنیم و از یک روش درونیابی مناسب مثلاً خطی می‌توان استفاده کرد و مقادیر تقریبی فرآیند در بین بازه‌ها را بدست آورد. اگر جملهٔ $L^1 b(t_\circ, X_{t_\circ}) \int \int dW_z dW_s$ از بسط ایتو- تیلور (Kloeden and Platen, 1995) را به تقریب اویلر اضافه کنیم شکل میلشتاین

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2} bb' \{(\Delta W)^2 - \Delta\}$$

برای حل عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی بدست می‌آید.

معیارهای همگرایی

گوییم تقریب $Y^\delta = \{Y(t), t \geq 0\}$ به فرآیند جواب X بطور قوی از مرتبه $\gamma > 0$ همگراست اگر ثابت C چنان موجود باشد که برای هر $\delta \in$ (۰و۱) داشته باشیم

$$\varepsilon = E(|X_T - Y^\delta(T)| \leq C\delta^\gamma$$

و تقریب Y^δ فوق به فرآیند جواب X بطور ضعیف از مرتبه $\beta > 0$ همگراست اگر برای هر چندجمله‌ای g ، یک ثابت متناهی C_g موجود باشد که برای هر $\delta \in$ (۰و۱) داشته باشیم

$$|E(g(X_T)) - E(g(Y^\delta(T)))| \leq C_g \delta^\beta$$

درحالت قوی تقریب Y^δ فرآیند ایتو را بطور مسیری تقریب می‌کند درحالی که در حالت ضعیف تقریب Y^δ فرآیند ایتو را از جهت بعضی از توابع، چون گشتاورها، تقریب می‌کند.

تبصره: می‌توان نشان داد که تحت شرایط مناسب مرتبه همگرایی قوی روش اویلر $\gamma = ۰/۵$ و روش میلشتاین $\gamma = ۱$ می‌باشد (Kloeden and Platen, 1995).

نتایج عددی

فرض کنیم فرآیند ایتو $X = \{X_t, t \geq 0\}$ در معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی خطی

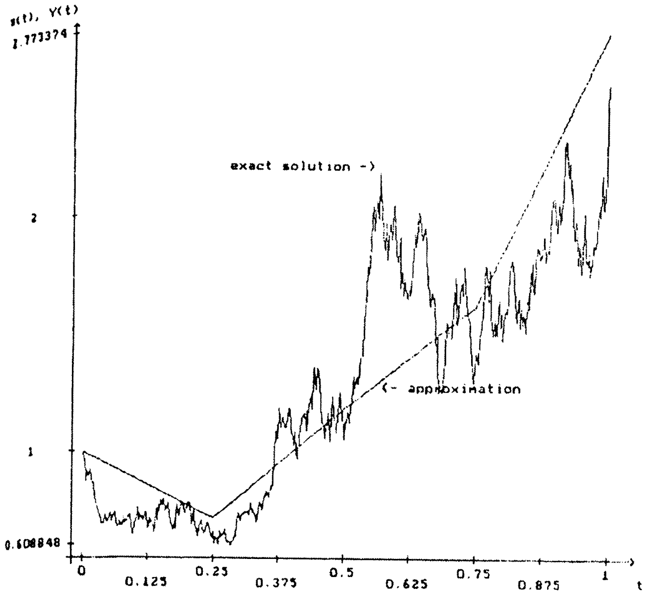
$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t$$

برای $t \in [0,T]$ با مقدار اولیه $X_\circ \in \Re$ صدق کند، می‌دانیم که برای $t \in [0,T]$ و فرآیند وینر داده شدهٔ $W = \{W_t, t \geq 0\}$ جواب صریح معادله به شکل $X_t = X_\circ + \exp((a - \frac{1}{2}b^2)t + bW_t)$ می‌باشد از طرف دیگر شکل اویلر و میلشتاین جواب به ترتیب زیر می‌باشد

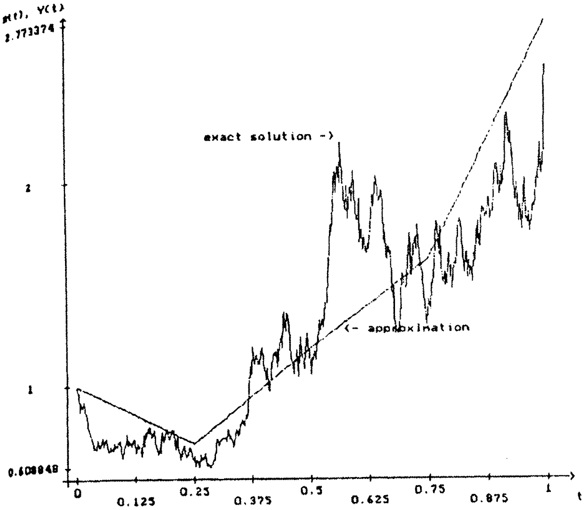
$$Y_{n+1} = Y_n + aY_n\Delta_n + bY_n\Delta W_n$$

$$Y_{n+1} = Y_n + aY_n\Delta_n + bY_n\Delta W_n + \frac{1}{2}bb'\{(\Delta W_n)^2 - \Delta_n\}$$

برای $X_\circ = ۱$ و $a = ۱/۵$ و $b = ۱$ و $\Delta = ۲^{-۲}$ و $\Delta = ۲^{-۴}$ مسیر واقعی و تقریبی جواب (شکل اویلر) در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است.

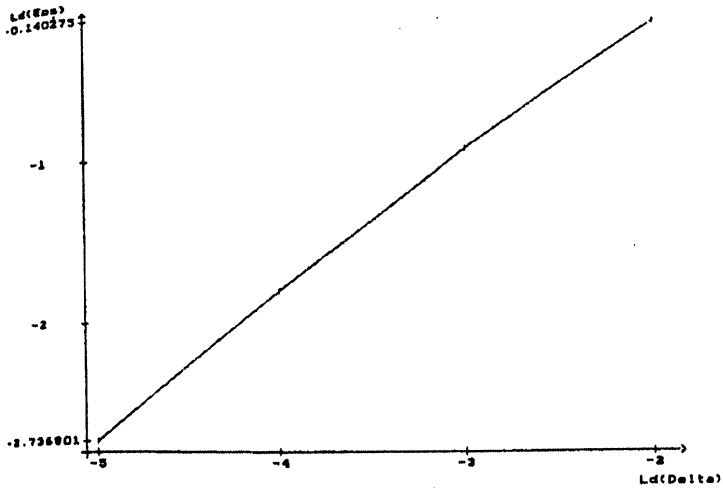


شکل ۱ - مسیر واقعی و تقریب اویلر برای $\Delta = ۲^{-۲}$

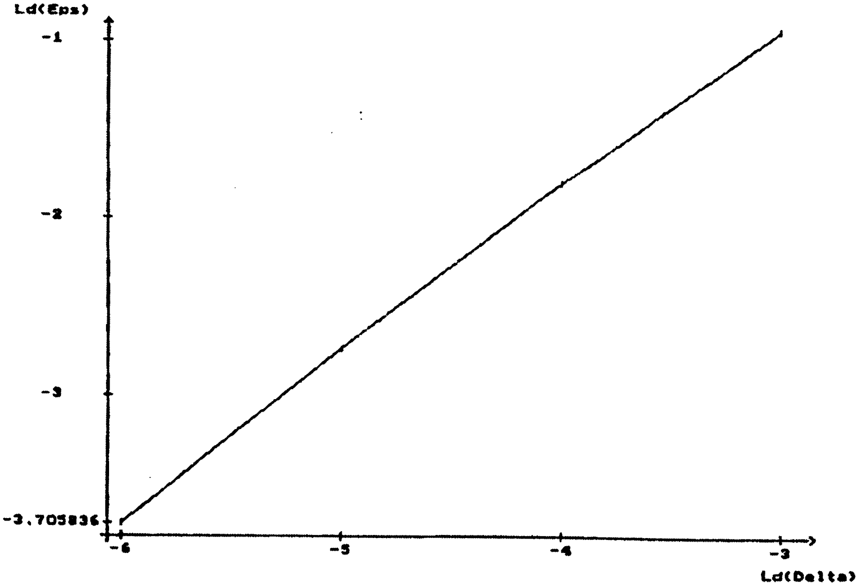


شکل ۲ - مسیر واقعی و تقریب اویلر برای $\Delta = 2^{-4}$

اکنون اگر برای همان مثال مطرح شده در فوق برآوردی از ε مثل $\hat{\varepsilon}$ را بدست آوریم و نمودار $\hat{\varepsilon}$ برحسب Δ را در مختصات لگاریتمی رسم کنیم خواهیم داشت (شکل ۳ و ۴):



شکل ۳ - نمودار $\log_2 \hat{\varepsilon}$ بر حسب $\log_2 \Delta$ برای روش اویلر



شکل ۴ - نمودار $\log_2 \hat{\varepsilon}$ بر حسب $\log_2 \Delta$ برای روش میلشتاین

توجه: در مورد روش اویلر دیده می‌شود که شیب این خط تقریباً 1/2 است یعنی: $\hat{\varepsilon}(\Delta) = K_1 \Delta^{\frac{1}{2}}$ همچنین در مورد روش میلشتاین دیده می‌شود که شیب این خط تقریباً ۱ می‌باشد یعنی: $\hat{\varepsilon}(\Delta) = K_2 \Delta$.

به عبارت دیگر شکلهای فوق تاییدی بر این مطلب می‌باشد که مرتبهٔ همگرایی قوی روش اویلر ۰/۵ و روش میلشتاین ۱ می‌باشد.

References

Burrage, K., and Burrage, P.M. (1996) *High strong order explicit Runge-Kutta methods for stochastic ordinary differential equations*, Appl. Numer. Math., **22,** 81-101.

Burrage, K., and Platen, E. (1994) *Runge-Kutta Methods for Stochastic Differential Equations*, Annals of Numereical Mathematics, **1,** 63-78.

Chang, C.C. (1987) *Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients*, Math. Comput., **49,** 523-542.

Kloeden, P.E., and Platen, E. (1995) *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin.

Kloeden,P.E., Platen, E., and Schurz, H. (1994) *Numerical Solution of SDEs Through Computer Experiments*, Springer, Berlin.

Milstein, G.N. (1995) *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*, Kluwer, Dord recht.