مجله علوم دانشگاه تهران
جلد سی‌ام (۱۳۸۳) شماره ۱ (۶۶-۵۱)

رهیافت بیز برای پیدا کردن اندازه‌ی نمونه

حمید پزشک
گروه ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشکده علوم، دانشگاه تهران
email: pezeshk@khayam.ut.ac.ir
(دریافت: ۸۱/۸/۲۷ ؛ پذیرش: ۸۲/۲/۲۴)

چکیده

در این مقاله به دوره برخی از روشهای اصلی تعیین اندازه نمونه از دیدگاه بیزی می پردازیم. تلاش شده که هیچ یک از تکنیکهای اصلی و کلیدی از قلم نیفتد. دو زمینه اصلی این دیدگاه عبارتند از زمینه بیز استنباطی و زمینه کاملاً بیزی. در زمینه بیز استنباطی ما غالباً درگیر استنباط راجع به پارامتر مجهول و مورد علاقه مان در جمعیت هستیم و اندازه نمونه را با استفاده از پارامترهای چگالی پسین بذست می آوریم. حال آنکه در زمینه کاملاً بیزی، مسئله اندازه نمونه را با بکارگیری تابع زیان مناسبی به یک مسئله تصمیم گیری تبدیل کرده با بهینه کردن تابع هدفی اندازه نمونه را بدست می آوریم.

واژه‌های کلیدی: *اندازه نمونه، آزمایش تصادفی، روش بیز استنباطی، روش کاملاً بیزی، روش درستنمائی/ بیزی، عامل بیز، روش مبتنی بر گشتاورها.*

۱- مقدمه

برخلاف روش کلاسیک که مسئله تعیین اندازه نمونه را در آزمایشهای مختلف از جمله آزمایشهای کلینیکی متوالیاً مورد توجه قرار می دهد در روش بیزی این مسئله کمتر مورد بحث و بررسی قرار می گیرد فام-گیا (Pham-Gia, 1992). دلایل مختلفی ممکن است برای این موضوع برشمرد. از جمله اینکه یک آماردان بیزی بیشتر به روش دنباله ای علاقمند است که با استفاده از توزیع پسین در یک مرحله بعنوان توزیع پیشین برای مرحله بعد عملیات دنباله‌ای انجام دهد تا به نتیجه مورد نظرش برسد. بنابراین بنظر نمی رسد که نیازی به تعیین اندازه نمونه ثابت وجود داشته باشد. دلیل دیگر می تواند این باشد که مشکلات محاسباتی مانع استفاده از شرایط مرتبط با "*دقت و واریانس*" یک برآوردیاب می‌گردد. اینگونه محاسبات مکرراً در روش کلاسیک (فریکوئنتیست) مورد استفاده قرار می‌گیرند. بعنوان مثال، محاسبه فاصله های اطمینان پسین با استفاده از نواحی Highest Posterior Density-(HPD) نیاز به جداول خاص مانند جداولی که ایزاکس و دیگران (Isaacs *et al.*, 1974) معرفی کردند یا نیاز به نرم‌افزارهای خاص دارد. توجه کنید که مسئله تعیین اندازه نمونه در اینحالت با توجه به شرایطی که روی طول این فاصله ها قرار داده می‌شود، مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. مثلاً اندازه نمونه را به نحوی تعیین کنیم که طول این فاصله ها کمتر از یک کمیت از قبل تعیین شده باشد که این روش، مسئلهٔ تعیین اندازهٔ نمونه را به یک فرایند بازگشتی پیچیده تبدیل می‌کند.

تعدادی از محققین روشهای بیز استنباطی را برای مسئله تعیین اندازهٔ نمونه مورد بررسی قرار دادند. برای میانگین توزیع نرمال، آدکوک (Adcock, 1988) فرمولهای فشردهٔ اندازهٔ نمونه را برای هر دو حالتی که واریانس جمعیت شناخته شده و یا ناشناخته باشد، ارائه داد. او از میانگین گیری پوشش فاصله های اطمینان پسین با طول ثابت روی توزیع پیش بینی کننده (Predictive Distribution) داده‌ها استفاده نمود. جوزف و بلیسل (Joseph and Belisle 1997) از ایده‌ای مشابه استفاده نمودند و فرمولهایی برای حالت میانگین طولهای فاصله های اطمینان پسین با پوشش ثابت ارائه دادند. این روشها به اختصار در بخشهای بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

روش بیزی تعیین اندازهٔ نمونه برای برآورد احتمال پیروزی در نمونه گیری دوجمله‌ای مورد توجه بسیاری از آماردانان قرار گرفته است. برای مثال، آدکوک (Adcock, 1987, 1992, 1995)، فام گیا و ترکان (Pham - Gia and Turkkan 1992)، جوزف و دیگران (Joseph, *et al.*, 1995) و پزشک وگیتینز (Pezeshk and Gittins, 2002) را ببینید. حالت تفاضل پارامترهای دو

جمعیت دو جمله ای توسط جوزف و دیگران (Joseph, *et al.*, 1995) مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش بعد برخی از روشهای بیز استنباطی در تعیین اندازهٔ نمونه را مرور می‌کنیم.

۲- روشهای بیزی و درستنمایی/ بیزی

فرض کنید $\theta \in \Theta$ پارامتر مورد علاقه و $\pi(\theta)$ توزیع پیشین آن باشد. فرض کنید که نمونه $\mathrm{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ به فضای داده ها $\mathbf{X}$ تعلق داشته مؤلفه های $\mathbf{X}$ جابجاپذیر (exchangable) باشند. توزیع پیش بینی کننده $\mathbf{X}$ که ممکن است به نام چگالی کناری قبل از پسین برای داده ها نیز نامیده شود عبارت است از:

$$f(\mathrm{x}) = \int_{\Theta} \ell(\mathrm{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta \qquad (۱)$$

و تابع چگالی پسین θ توسط رابطه زیر بدست می آید:

$$\pi^{n}(\theta|\mathrm{x}) = \frac{\ell(\mathrm{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \ell(\mathrm{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} \qquad (۲)$$

که در آن $\ell(\mathbf{x}|\theta)$ تابع درستنمایی داده هاست. اگر چگالی پیشین $\pi(\theta)$ روی Θ دارای توزیع یکنواخت باشد آنگاه (۲) تابع درستنمایی نرمالیزه شده است.

بر اساس پیشنهاد جوزف و دیگران (Joseph *et. al.* 1997) اگر $\pi(\theta)$ اطلاعات پیشین واقعی را در هر دو رابطه (۱) و (۲) نشان دهد آنگاه مسئله تعیین اندازه نمونه توضیح داده شده در سه بخش بعدی ۱۰۲ تا ۳۰۲ را بعنوان روش بیزی می نامند و چنانچه $\pi(\theta)$ در رابطه (۱) توزیع پیشین واقعی ولی در رابطه (۲) توزیع یکنواخت باشد آنگاه آن را روش مخلوط درستنمایی/ بیزی برای تعیین اندازه نمونه می نامند.

۱- ۲ - فاصله های تحمل یا روش میانگین پوشش Average Coverage (ACC) Criteron

با استفاده از روش ناحیه تحمل آلفا-انتظار منتسب به گاتمن و فریزر (Guttman and Fraser, 1956) آدکوک (Adcock, 1987) روش میانگین پوشش را معرفی کرد. اساس این روش بر پایه ثابت نگهداشتن طول l از HPD و تغییر دادن احتمال پوشش $1-\alpha$ بر حسب $\boldsymbol{x}$ است. به عبارت دیگر لازم است مشروط بر مشاهده داده های $\boldsymbol{x}$، اجازه دهیم θ در فاصله مشخصی با طول l با احتمال $1-\alpha$ قرار گیرد:

$$\int_{a(\mathbf{x},n)}^{a(\mathbf{x},n)+l} \pi^{n}(\theta|\mathbf{x})d\theta = 1-\alpha \qquad (۳)$$

که در آن $a(\mathbf{x},n)$ کران پایین HPD با طول l و توزیع پسین $\pi^{n}(\theta|\mathbf{x})$ است که در حالت کلی هم به $\mathbf{x}$ و هم به n بستگی دارد.

این جواب با تغییر $\mathbf{x}$ تغییر می کند و قبل از نمونه گیری نیاز داریم رابطه (۳) به طور متوسط برای همهٔ نمونه‌های ممکن برقرار باشد. بنابراین n را بنحوی اختیار می‌کنیم که:

$$\int_{\mathbf{x}} \left\{ \int_{a(\mathbf{x},n)}^{a(\mathbf{x},n)+l} \pi^{n}(\theta|\mathbf{x})d\theta \right\} f(\mathbf{x})d(\mathbf{x}) = 1-\alpha$$

۲- ۲ - روش میانگین طول Average Length Criterion (ALC)

این روش بر این پایه استوار است که احتمال پوشش $1-\alpha$ ثابت نگهداشته میشود و طول فاصله HPD وابسته به داده ها تغییر می کند. در این روش که اولین بار توسط جوزف و دیگران (Joseph et al., 1995) معرفی شد برای هر $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ ابتدا باید طول $l'(\mathbf{x},n)$ را برای HPD بنحوی یافت که:

$$\int_{a(\mathbf{x},n)}^{a(\mathbf{x},n)+l'(\mathbf{x},n)} \pi^{n}(\theta|\mathbf{x})d\theta = 1-\alpha \qquad (۴)$$

و سپس اندازه نمونه را کمترین عدد صحیح نامنفی در نظر می گیریم که

$$\int_{X} l'(\mathrm{x},n) f(\mathrm{x})d(\mathrm{x}) \le l \qquad (۵)$$

که در آن l یک طول از قبل تعیین شده است. سمت چپ نامعادله (۵) میانگین وزنی فاصله های HPD با طول ثابت است که در آن وزنها چگالی پیش بینی کننده $f(\mathbf{x})$ می باشند.

۳- ۲ - روش بدترین برآمد Worst Outcome Criterion (WOC)

دو روش قبلی ACC و ALC بر پایه میانگین گیری روی تمام نمونه های ممکن بنا شده اند و از آنجائیکه استنباطها مبتنی بر نمونه های مشاهده شده می باشند، لذا برای برخی از نمونه ها غالباً این دو روش به ترتیب به پوششهای کوتاه و طولهای بلند منجر می شوند. یک روش ابداع شده توسط فام گیا و ترکان (Pham-Gia and Turkkan 1992) به وسیله جوزف و دیگران (Joseph et. al. 1995) تکمیل شد تا از این مشکل جلوگیری نماید. این روش محافظه کارانه ماکزیمم طول l و مینیمم پوشش α -۱ را بدون در نظر گرفتن داده ها $\mathbf{X}$ مورد بررسی قرار می دهد. لذا اندازه نمونه برابر است با کمترین مقدار n که

$$\inf_{\mathbf{x}\in \mathrm{X}} \int_{a(\mathbf{x},n)}^{a(\mathbf{x},n)+l} \pi^{n}\left(\theta \middle| \mathbf{x}\right) d\theta \geq 1-\alpha \qquad (۶)$$

این قاعده بنام روش بدترین برآمد شناخته شده است. (دنیس لیندلی (Lindley, 1997) اعلام می‌کند که این روش بیزی نیست زیرا از قاعده میانگین گیری روی توزیع کناری X تبعیت نمی کند).

۳- روش عامل بیز یا روش ویس (Weiss)

مکانیسم استاندارد بیزی برای آزمون فرض های آماری بر اساس محاسبه احتمالهای پسین تحت دو فرض بنا شده است. بهرحال گاهی اوقات احتمالهای پیشین دو فرض H_0 و H_1 در دسترس نمی باشند. در چنین حالاتی استنباط بر اساس عامل بیز (یا بیز فاکتور) $B(0:1 \mid \mathbf{x})$ بنا می شود:

$$B(0:1 \mid \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} \mid H_0)}{f(\mathbf{x} \mid H_1)}$$

که با استفاده از نمادهای ویس (Weiss, 1997) می‌نویسیم:

$$f(\mathbf{x} \mid H_j) = \int f(\mathbf{x} \mid \theta_j)\pi(\theta_j \mid H_j)d\theta_j$$

که در آن θ_i پارامترهای تحت فرضهای H_i , $i = 0,1$ بوده، $f(\mathbf{x} \mid \theta_i)$ توزیع نمونه‌ای $\mathbf{X}$ تحت H_i و $\pi(\theta_i \mid H_i)$ چگالی پیشین تحت فرض H_i است. از آنجائیکه $B(0:1 \mid \mathbf{x})$ نامنفی است، راحتتر است با لگاریتم گیری تعریف کنیم.

$$b_{01} = b(0:1 \mid \mathbf{x}) = \log B(0:1 \mid \mathbf{x})$$

مقدار مثبت b_{01} به معنی پشتیبانی داده‌ها از H_0 و مقدار منفی به معنی پشتیبانی داده‌ها از H_1 است. کاس و رفتری (Kass, Raftery 1995) b_{01} بین ۳ و۵ را بعنوان شواهد قوی به نفع H_0 و۵ $= b_{01}$ را بعنوان شاهد بسیار قوی به نفع H_0 تفسیر می کنند. مقادیر منفی b_{01} به نحو مشابهی به نفع H_1 تفسیر می‌شوند.

حال انتخاب نمونه را می‌توانیم با هدف دستیابی به احتمال آنکه b_{01} تحت H_0 از k (دلخواه) بزرگتر شده یا احتمال آنکه b_{01} تحت H_1 از k- کوچکتر شود، بدست آوریم. خطای نوع اول را می توان با $P(b_{01} < k \mid H_0)$ و خطای نوع دوم را با $P(b_{01} \geq -k \mid H_0)$ تعریف کرد. اندازه نمونه می تواند طوری تعیین شود که دو قید بالا آورده شوند.

ویس (Weiss 1997) روش دیگری را پیشنهاد داده و جزئیات تعیین اندازه نمونه را بر اساس عامل بیز دریک جمعیت نرمال با واریانس شناخته شده بدست می دهد. ایده اصلی بر اساس پیدا کردن اندازه نمونه با مشخص کردن α و β و حل معادلات برای H_0 و H_1 داده شده است:

$$\begin{cases} P\{b_{01} > b_{cut} \mid H_0\} = 1-\alpha \\ P\{b_{01} \leq b_{cut} \mid H_1\} = 1-\beta \end{cases} \qquad (۷)$$

پس از حل این دستگاه هر دو مقدار n و b_{cut} بدست می‌آیند.

۴ - روشهای مبتنی بر گشتاورها

سابقه این روشها به سالیان قبل بر می‌گردد. مثلاً دی گروت (De Groot 1995 ص ۳۲۳) اشاره می کند که در یک نمونه گیری دو جمله ای اگر توزیع پیشین یکنواخت (حالت خاصی از توزیع بتا) باشد آنگاه نمونه ای به اندازه n=۲۲ ضمانت خواهد کرد که واریانس توزیع پسین کمتر یا مساوی ۱٪ باشد. از آنجائیکه واریانس توزیع پسین اطلاعات مناسبی راجع به پراکندگی توزیع بدست می دهد، برخی از محققین، مسئله تعیین اندازه نمونه را با بررسی کرانهای بالا

برای واریانس توزیع پسین بررسی کرده‌اند. فام- گیا و ترکان (Pham-Gia and Tarkkan, 1992).

اگر V_{post} نمایانگر واریانس توزیع پسین باشد آنگاه ایده کلی برای تعیین اندازه نمونه با استفاده از واریانس توزیع پسین عبارت است از :

$$E_X\{\mathbf{V}_{post}\} \leq \varepsilon \qquad (۸)$$

که در آن $\varepsilon>0$ یک ثابت از قبل دانسته شده است.

۱- ۴ - ارزش انتظاری اطلاعات نمونه‌ای

در برخی از کاربردهای تصمیم بیزی، ممکن است ارزش اطلاعات (برحسب پول یا واحدهای مشابه) در نظر گرفته شود. زمانی که این امر کمی شد می توان اطلاعات جمعیتی یا نمونه‌ای را به میانگین یا واریانس توزیع متناظر مربوط نمود.

تعریف ۱: ارزش انتظاری اطلاعات کامل (EVPI) برابر مقدار انتظاری زیان تصمیم بهین تحت اطلاعات جاری و قبل از نمونه گیری است. همانطور که کلاکستون و پوسنت (Claxton and Posnett, 1996) اشاره می کنند، احتمالی وجود دارد که تصمیم اخذ شده براساس اطلاعات پیشین غلط بوده باشد و زیان فرصت از دست رفته بوجود آید. ارزش انتظاری تابع زیان در واقع هزینه انتظاری عدم قطعیتی است که مسئله را در برگرفته است. این را ارزش انتظاری اطلاعات کامل می نامند.

تعریف ۲: ارزش انتظاری اطلاعات نمونه ((EVSI(n)) بعنوان تابعی از n در واقع مقدار (پولی) است که ممکن است برای اطلاعات مورد انتظار از نمونه بپردازیم.

تعریف ۳: ارزش بهره خالص نمونه گیری ((ENGS(n)) عبارت است از تفاضل بین ((EVSI(n)) و هزینه نمونه گیری cn، که در آن c هزینه هر واحد نمونه ای و n حجم نمونه است:

$$\text{ENGS}(n)=\text{EVSI}(n)-cn$$

با ماکزیمم کردن ENGS(I) ممکن است اندازه بهین نمونه را بیابیم.

تذکر: تحت تابع زیان درجه دو $L(\theta,a)=k(\theta-a)^2$ که در آن $k>0$ ثابت است خواهیم داشت:

$$EVPI=kV_{prior}$$

و

$$EVSI(n)=k(V_{prior}-E(V_{post}))$$

که در آن V_{prior} واریانس توزیع پیشین و V_{post} واریانس توزیع پسین است.
با استفاده از روش موریس (Morris 1968)، فام گییا و ترکان (Pham-Gia and Turkkan, 1992) نشان دادند اگر در یک نمونه‌گیری دو جمله‌ای، پارامتر مورد مطالعه یا P دارای توزیع پیشین بتا با پارامترهای α و β باشد آنگاه اندازهٔ نمونه بهین برابر است با:

$$n^{*}=\max\left\{0,\quad \left[\frac{k(\alpha+\beta)V_{prior}}{c}\right]^{\frac{1}{2}}-(\alpha+\beta)\right\} \tag{۹}$$

تا زمانی که ENGS(n) مثبت است بهرهٔ نمونه گیری به هزینهٔ آن می چربد ولی بهره نمونه گیری در n^* ماکزیمم می شود.

۵- روش کاملاً بیزی (نظریه تصمیم)

اولین مقاله براساس نظریه تصمیم برای تعیین اندازه نمونه توسط گروندی و دیگران (Grundy et. al., 1961) ارائه شد. روش آنها برپایه تابع مطلوبیت $u(n,\mathbf{x},a,\theta)$ است که نشانگر سود حاصل از انتخاب نمونه n تایی و مشاهده $\mathbf{x}$ و اتخاذ تصمیم a است وقتی که پارامتر مقدار θ را دارد.
با فرض توزیع پیشین $\pi(\theta)$ برای θ روش آنها (همانطور که توسط لیندلی (Lindley, 1997) توضیح داده شده است) عبارت است از محاسبه امید ریاضی روی کمیات تصادفی θ و $\mathbf{x}$ و ماکزیمم سازی روی کمیات قطعی است: مقدار انتظاری مطلوبیت ممکن است بفرم زیر نوشته شود:

$$\max_n \left[\int_{\mathbf{x}} \max_a \left\{ \int_{\theta} u(n,\mathbf{x},a,\theta)\pi''(\theta \mid a,\mathbf{x})d\theta \right\} f(\mathbf{x} \mid n)d\mathbf{x} \right] \qquad (۱۰)$$

آنها فرض می‌کنند که تابع مطلوبیت به $\mathbf{x}$ بستگی ندارد و روی n خطی و جمع پذیر است و می‌گیرند:

$$u(n,\mathbf{x},a,\theta) = u(a,\theta) - cn$$

بنابراین (۱۰) را ممکن است بصورت زیر بنویسیم:

$$\max_n \left[\int_{\mathbf{x}} \max_a \left\{ \int_{\theta} u(a,\theta)\pi''(\theta \mid \mathbf{x})d\theta \right\} f(\mathbf{x} \mid n)d\mathbf{x} - cn \right] \qquad (۱۱)$$

توجه کنید که انتخاب a زمانی که $\mathbf{x}$ و n داده شده باشند، تأثیری بر مقدار θ نخواهد داشت بهمین جهت است که در (۱۱) بجای $\pi''(\theta \mid a,\mathbf{x})$ قرار دادیم $\pi''(\theta \mid \mathbf{x})$.

این روش تعیین اندازه نمونه را ماکزیمم سازی مقدار انتظاری مطلوبیت (MEU) می‌نامند. لیندلی (Lindley, 1997) اشاره می‌کند که استفاده از MEU برای تعیین اندازه نمونه همه چیز را تحت کنترل خود دارد. به نظر او این روش اولاً به طور ذاتی سازگار (Coherent) است و ثانیاً این روش دارای الگوریتم خوش تعریف یعنی معادله (۱۱) برای جواب است. این الگوریتم شامل چند امید ریاضی و چند ماکزیمم سازی است که براحتی می تواند روی یک کامپیوتر صورت پذیرد. ثالثاً روش فوق بسیار قابل انعطاف است زیرا طیف وسیعی از توابع مطلوبیت می توانند به کار گرفته شوند.

۶- مثال

در این بخش روشهای بیزی مورد اشاره در بخش های بالا را برای یک جمعیت نرمال در نظر گرفته اندازهٔ نمونه را برای زمانی که می خواهیم راجع به میانگین استنباط نمائیم بدست می آوریم. ما هر دو حالتی را که در آنها واریانس شناخته شده یا ناشناخته است مورد بررسی قرار می دهیم.

۱-۶ اندازه نمونه برای استنباط راجع به میانگین یک جمعیت نرمال وقتی که واریانس شناخته شده است

فرض کنید مشاهدات به شرط θ از هم مستقل بوده همگی دارای توزیع $N(\theta,\sigma^2)$ باشند که در آن σ^2 شناخته شده است. همچنین فرض کنید θ دارای یک چگالی پیشین $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n_0})$ است که $n_0>0$. چگالی پسین θ به شرط میانگین $\bar{x}_n$ و توزیع (غیر شرطی) $\bar{X}_n$ خواهند شد.

$$\theta\,|\,\bar{x} \sim N(\frac{n\bar{x}_n+n_0\mu}{n+n_0},\frac{\sigma^2}{n+n_0}) \quad , \quad \bar{X}_n \sim N(\mu,\sigma^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}))$$

همانطور که ژوزف و بلی سل (Joseph and Belisle 1997) اشاره کردند، روشهای ACC و ALC و WOC در این حالت به یک نتیجه ختم خواهند شد. فرض کنید μ' میانگین پسین θ باشد و فاصله HPD را با $|\theta-\mu'|\le e$ نشان دهید. روش ACC این ناحیه HPD به طول 2e می‌شود.

$$\int_{\bar{x}_n} P\left[|\theta-\mu'|\le e\,|\,\bar{x}_n\right] f(\bar{x}_n)d\bar{x}_n \ge 1-\alpha$$

توجه کنید که $P\left[|\theta-\mu'|\le e\,|\,\bar{x}_n\right]$ به $\bar{x}_n$ بستگی ندارد. پس اندازه نمونه باید بنحوی باشد که

$$\Phi\left[\sqrt{(n+n_0)e}\,/\,\sigma\right]\ge 1-\alpha/2 \qquad (۱۲)$$

که در آن $\Phi(u)=\int_{-\infty}^{u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$. معادله (۱۲) برحسب $n+n_0$ می شود.

$$n+n_0 \ge \sigma^2 z^2_{\alpha/2}\,/\,e^2 \qquad (۱۳)$$

این رابطه بوضوح تاثیر توزیع پیشین θ را نمایش می دهد. اگر فرض کنیم اطلاعات پیشین بنحوی است که هیچ اطلاعی راجع به θ بدست نمی دهد، یعنی n_0 عملاً صفر است آنگاه رابطه (۱۳) با رابطه کلاسیک برای تعیین اندازه نمونه یکی می شود. هنگامی که $n_0 \ge \sigma^2 z^2_{\alpha/2}/e^2$ شود آنگاه ممکن است نتیجه بگیریم که لزومی به نمونه گیری نیست.

تذکر: روش ACC ممکن است به نحوی تعمیم داده شود که رابطه کلاسیک تعیین اندازه نمونه برای آزمون فرضها بدست آید:

$$H_0 : \mu' = \mu'_0$$
$$H_1 : \mu' = \mu'_0 + e$$

آنگاه با توجه به معادلات

$$\int_{\bar{x}_n} \{P[|\theta - \mu'| \leq e \mid \bar{x}_n \text{ و } H_0]\} f(\bar{x}_n) d\bar{x}_n = 1 - \alpha$$
$$\int_{\bar{x}_n} \{P[|\theta - \mu'| \leq e \mid \bar{x}_n \text{ و } H_1]\} f(\bar{x}_n) d\bar{x}_n = 1 - \beta$$

می‌بینیم:

$$n + n_0 = \sigma^2 (z_{\alpha/2} + z_\beta)^2 / e^2 \qquad (۱۴)$$

با استفاده از روش ویس اجازه دهید آزمون فرض زیر را در نظر بگیریم:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta \sim N(\theta_0 + e, \ \sigma^2/n_0)$$

همانطور که قبلاً اشاره گردید روش ویس نیاز به محاسبه لگاریتم بیز یعنی b_{01} دارد. آنگاه اندازه نمونه n و b_{cut} با حل دستگاه معادلات (۷) بدست می آیند. برای n_0 متناهی جواب دستگاه از حل عددی بدست می‌آید. اگر $n_0 \to \infty$ آنگاه فرض مقابل را فرض دقیق نامیده اندازه نمونه می‌شود.

$$n \geq \sigma^2 (z_\alpha + z_\beta)^2 / e^2 \qquad (۱۵)$$

که بسیار شبیه روش کلاسیک تعیین اندازه نمونه در آزمون فرضهاست. اگر $n_0 \to \infty$ آنگاه فرض مقابل اصطلاحاً مبهم نامیده می شود و توان آزمون برای همهٔ نمونه ها به یک نزدیک می گردد. لذا چنانچه n_0 را بصورت شهودی تعیین می کنیم باید دقت زیادی در نظر بگیریم.
با استفاده از روش گروندی (Grundy et. al., 1961) فرض کنید می خواهیم اندازهٔ نمونه را با استفاده از تابع مطلوبیت زیر بدست آوریم.

$$u(n, \mathbf{x}, a, \theta) = \xi - cn \qquad (۱۶)$$

که در آن اگر $\theta \mid \bar{x}_n \in [a, a+e]$ آنگاه مـی گیـریم $\xi = 1$ و اگـر $\theta \mid \bar{x}_n \notin [a, a+e]$ می گیریم $\xi = 0$. هزینه هر واحد نمونه c و طول فاصله e هر دو داده شده انـد. عمـل a کـه نقطه آغازین فاصله است از حل معادله زیر بدست می آید:

$$\max_n \left[\int_{\mathbf{x}} \max_a \left\{ \int_\theta \xi \pi''(\theta \mid \mathbf{x}) d\theta \right\} f(\mathbf{x} \mid n) d\mathbf{x} - cn \right] \tag{۱۷}$$

واضح است که:

$$\int \xi \pi''(\theta \mid \mathbf{x}) d\theta = \int_a^{a+e} \pi''(\theta \mid \mathbf{x}) d\theta$$

$$= \Phi\left(\frac{a+e-\mu'}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n+n_0}}}\right) - \left(\frac{a-\mu'}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n+n_0}}}\right)$$

برای پیدا کردن ماکزیمم عبارت فوق از $\frac{d}{da}\int_a^{a+e} \pi''(\theta \mid \mathbf{x}) d\theta = 0$ اسـتفاده مـی کنـیم و بدست می‌آوریم که $a = \mu' - e/2$ عمل بهین است و

$$\max\left\{ \int_\theta \xi \pi''(\theta \mid \mathbf{x}) d\theta \right\} = 2\Phi\left(\frac{e\sqrt{n+n_0}}{2\sigma} \right) - 1 \tag{۱۸}$$

با قرار دادن (۱۸) در (۱۷) و توجه به این نکته که (۱۶) به $\mathbf{x}$ بستگی ندارد، اندازه بهین نمونه می شود

$$\max_n \left[2\Phi\left(\frac{e/2\sqrt{n+n_0}}{\sigma} \right) - 1 - cn \right] \tag{۱۹}$$

برای محاسبه ماکزیمم عبارت فوق از مشتقگیری نسبت به n استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$2\left[\Phi'\left(\frac{e/2\sqrt{n+n_0}}{\sigma} \right) \right] \frac{e}{4\sigma}(n+n_0)^{-\frac{1}{2}} - c = 0$$

بنابراین اندازه بهین نمونه جواب معادله زیر است:

$$n+n_0=\left[\frac{e}{2\sigma c}\Phi'\left\{\frac{e}{2\sigma}\sqrt{n+n_0}\right\}\right]^2 \qquad (۲۰)$$

برای تعیین اندازه نمونه در حالتی که داده ها از جمعیت نرمال با واریانس معلوم بدست آمده اند توجه به این نکته ضروری است که هر سه روش ACC و ALC و WOC به یک نتیجه ختم می شوند. روش گروندی با این سه روش متفاوت است ولی همانطور که آدکوک (Adcock, 1997) اشاره می کند می‌توان با انتخاب c مناسب این روش را با ACC معادل نمود این در جدول زیر نشان داده شده است.

اندازه نمونه	قاعده
۳۳	ACC, ALC, WOC
	رابطه (۱۳)
	روش کاملاً بیزی
	رابطه (۲۰)
۱۲۶	C=۰/۰۰۱
۶۸	C=۰/۰۰۳
۳۳	C=۰/۰۰۷
۲۲	C=۰/۰۱

α=۰/۰۵ ،β=۰/۲ ،n_0=۲ ،e=۱ ،σ=۳

۶-۲- اندازه نمونه برای استنباط راجع به میانگین یک جمعیت نرمال وقتی که واریانس شناخته شده نیست.

زمانی که واریانس دانسته شده است نتایج بخش قبل نشان می دهد که رابطه نزدیک بین محاسبات مربوط به اندازه نمونه از دیدگاه بیزی و محاسبات مربوط به اندازه نمونه از دیدگاه فریکوئنیتست یا کلاسیک وجود دارد. وقتی که واریانس شناخته شده نیست اختلافات بزرگ می شود. در روش کلاسیک ممکن است نیاز به دو بار نمونه گیری یا داشتن برآورد مناسبی از σ^2 باشد. در روش بیزی ایده کلیدی عبارت است از در نظر گرفتن تابع چگالی پیشین توأم برای هر دوی μ و σ^2. ژوزف و بلی‌سل (Joseph and Belisle, 1997) روابط اصلی تعیین اندازه نمونه از دیدگاه بیزی را برای جمعیت نرمال در هر دو حالتی که σ^2 دانسته و نادانسته است، بدست می‌دهند. با استفاده از روش آدکوک (Adcock, 1988) فرض کنید σ^2 نادانسته

است ولی کمیت $w_0 \, {\sigma_0}^2 / \sigma^2$ دارای توزیع مربع کای با $w>0$ درجه آزادی است (این شکل استاندارد توزیع پیشین برای واریانس است). همانند بحث بالا HPD به صورت $|\theta - \mu'| \leq e$ را در نظر می گیریم در اینصورت تعیین اندازه نمونه با استفاده از روش ACC منجر به رابطه زیر می گردد:

$$n + n_0 \geq {\sigma_0}^2 t_{\alpha/2}(w) \Big/ e^2 \tag{۲۱}$$

این رابطه بسیار شبیه به رابطه اشتاین (Stein, 1945) با $n_0\text{-}1=w$ و σ^2 به جای s^2 است. ژوزف وبلی سل (Joseph and Belisle, 1997) قواعد ALC و WOC را معرفی کرده اند. برای روش کاملاً بیزی با استفاده از تابع مطلوبیت (۱۶) بدست می آوریم.

$$n + n_0 = \left[\alpha/2 \, f_w \left\{ \frac{e}{2\sigma_0} \sqrt{n+n_0} \right\} \Big/ \sigma_0 c \right]^2 \tag{۲۲}$$

که در آن $f_w(.)$ چگالی t - استودنت با w درجه آزادی و c هزینه هرواحد نمونه است. روش مربوط به عامل بیز می تواند مورد استفاده قرار گیرد ولی دشواریهای زیادی در محاسبه $f(\bar{x}_n \mid H_0)$ و $f(\bar{x}_n \mid H_1)$ وجود خواهد داشت.

Reference

Adcock, C.J. (1998) *A Bayesian Approach to Calculating Sample sizes*. The Statistician **37**, 433-439.

Adcock, C.J. (1992) *Bayesian Approaches to the Determination of Sample sizes for Binomial and Multinomial Sampling-some comments on the paper by Pham-Gia and Turkkan*. The Statistician **41**, 399-404.

Adcock, C. J. (1995) *The Bayesian Approach to the Determination of Sample sizes-some comments on the paper by Joseph, Wolfson, and Berger*. The Statistician **44**, 155-161.

Adcock, C. J. (1995) *Sample size Determination*: A Review. Statistician **46**, 261-283.

Claxton, K. and Posnett, J. (1996) *An Economic Approach to Clinical Trial Design and Research Priority-Setting*. Health Economics **5**, 513-524.

Fraser, D.A.S. and Guttmann, I. (1956) *Tolerance Regions*. Ann Math. Statist. **27**, 162-179.

Gittins, J.C. and Pezeshk, H. (2000a) *How Large Should A Clinical Trial Be*? The Statistician 49, part 2, pp. 177-187.

Gittins, J.C. and Pezeshk, H. (2000b) *A Behavioural Bayes Method for Determining the Size of a Clinical Trial*. Drug Information Journal . **34**, 355-363.

Grundy, P.M., Healy, M.J.R. and Rees, D.H. (1956) *Economic Choice of the Amount of Experimentation*. J. R. statist. Soc. A **18**, 32-48.

Isaacs, G.L., Christ, D.E., Novick, M.R., and Jackson, P.H. (1974) *Tables for Bayesian Statistics*. University of Iowa press, Iowa.

Joseph, L., Wolfson, D.B., and Du Berger, R. (1995) *Sample Size Calculations for Binomial Proportions via a Highest Posterior Density Intervals*. Statistics in Medicine **44**, 143-154.

Joseph, P. (1997) *Bayesian Sample Size Determination for Normal Means and Differences Between Normal Means*. The Statisticians **46**, 209-226.

Kass, R.E., and Raftery, A.E. (1995) *Bayes Factors*. J. Am. Statist. Ass. **90**, 773-795.

Lindley, D.V. (1997) *The Choice of Sample Size*. The Statistician 46, 129-138.

Morris, W.T. (1968) *Management Science: a Bayesian Introduction*. Prentice-Hall, Englewood Cliff, NJ.

Pezeshk, H., and, J.C. (1999) *Sample Size Determination in Clinical Trials*. Student 3, No.1, 19-26.

Pezeshk, H., and Gittins, J.C. (2002) *A Fully Bayesian Approach to Calculating Sample Size for Clinical trials with Binary Responses*. Drug Information Journal **36**, 143-150.

Pezeshk, H. (2002) *How Many Subjects? A Bayesian Approach to the Design of clinical Trial.* Iranian international Journal of Science **3**, 127-133.

Pham-Gia, T., and Turkkan, N. (1992) *Sample Size Determination in Bayesian Analysis*. The Statistician **41**, 389-392.

Raiffa, H., and Schlaifer, R. (1961) *Applied Statistical Decision theory*. Division of Research Harvard Business.

Stein, C. (1945) *A two-Sample Test for a Linear Hypothesis where Power is Independent of Variance*. Ann. Math. Statist. **16**, 243-258.

Weiss, R. (1997) *Bayesian Sample Size Calculations for Hypothesis Testing*. The Statistician **46**, 158-191.