نشریه دانشکدهٔ علوم شماره ۳ جلد سوم مهرماه ۱۳۵۰

کاربرد روش خاص «گاوس ـ فوگلر» در تعدیل شبکه‌های گرانی و تعیین خطای اختلاف گرانی بین دو نقطه غیر مشخص از شبکه

دکتر حسین زمردیان

مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران

۱ـ خلاصه :

روش خاص تعدیلی که در این مقاله مورد بحث قرار میگیرد روش« تعدیل مرحله‌ای گاوس فوگلر » است که ازلحاظ سادگی دراغلب شبکه های ترازیابی بکار رفته ونگارنده آنرا درمورد شبکه درجه دوم جاذبه ایران (قسمت اول آذربایجان) مورد آزمایش قرار داده است.

دراین مقاله ضمن توضیح کاربرد این نوع تعدیل تحقیقی درمورد تعیین خطای اختلاف گرانی بین دونقطه غیرمشخص ازچنین شبکه هائی نیزبعمل آمده است.

۲ـ تاریخچه:

درتمام اندازه گیریهائی که تعداد مشاهدات برتعداد مجهولات فزونی دارد ، ازدیرباز روش های مختلف تعدیل برای تعیین «مقدار واقعی مجهول» بکار رفته که مهمترین آنها روش « کمترین مربعات » است. گاوس Gauβ دانشمند معروف آلمانی با مطالعات کافی در روی شبکه های مختلف ژئودزی نمونه های مختلف تعدیل شبکه ها را بااستفاده از روش «کمترین مربعات» ارائه داده است. روش «تعدیل مرحله‌ای» که دراین مقاله مورد بحث و استفاده قرارگرفته یکی ازحالات خاص روش های تعدیلی پیشنهادی گاوس می‌باشد.

۳ـ اطلاعات:

نتایج اندازه‌گیری یک شبکه درجه دوم گرانی که شامل ۳۰ نقطه جاذبه بود ، توسط نگارنده درسال ۱۳۴۸ درمنطقه آذربایجان معلوم گردید . برای تحقیق از روش تعدیل استفاده گردید و برای اختلاف گرانی دونقطه بازرگان و زنجان که دورترین فاصله‌را ازیکدیگر دراین شبکه دارا است، خطای اختلاف گرانی بااستفاده ازتئوری تعدیل های گاوس محاسبه گردیده است.

٤ـ روش‌مطالعه :

قبل از شرح روش تئوری این نوع تعدیل ذیلاً مختصری ازقواعد وروش های کلی تعدیل شبکه های مختلف ژئودزی را که برمبنای تابع خطاها استوار است یادآوری مینماید.

٤ ـ ۱ - مسائل مربوط به‌محاسبات تعدیلی:

اگر برای تعیین مجهول ویامجهول هائی اندازه گیریهائی زیادتراز آنچه درحقیقت موردلزوم است انجام شده‌باشد، درتعیین «مقدار واقعی مجهول» اختلاف هائی ظاهرمیگردد . منظور ازکاربرد روش های تعدیل،تعیین «صحیح ترین مقدار» برای تعیین مجهولات باتوجه بتمام اندازه گیریهای انجام‌شده است.

«صحیح ترین مقدار» مجهول یامجهولات باتوجه بقوانین حساب احتمالات وقتی قابل محاسبه است که خطای اندازه گیریها ازقوانین مشخص خطاها پیروی نماید. دراین مورد طبق نظریه «گاوس» بایداز ترکیب نتایج اندازه گیری باروش های خاص «مقادیر تقریبی نزدیک بواقع»را برای مجهولات تعیین نمود. این «مقادیر تقریبی» تعیین شده‌را میتوان «مناسب‌ترین مقداربرای مجهول» نیزنامگذاری کرد . با توجه بآنچه که گذشت غرض ازیک « محاسبه تعدیلی » یابطور خلاصه یک «تعدیل» تعیین این « مناسب‌ترین مقدار مجهول» ازتمام اندازه گیریهای انجام شده وتعیین خطای مجهولات وبالاخره خطای مقادیر تعدیلی آنها است.

روش این گونه محاسبات «تعدیلی» باید بطریقی برگزیده شوند که نتایج حاصله بنحوی مصون ازخطای محاسبات بوده وقابل بازرسی باشند.

فرض کنیم v_1 و v_2 و ...... و v_n تصحیحاتی باشند که باید بمقدار اندازه گیری اضافه نمود تامقادیر تعدیلی حاصل گردند. چنانچه خواهان «محتمل‌ترین مقدار» برای نتایج تعدیل باشیم بایدسیستم v_i ها نیز«محتمل‌ترین مقادیر»برای تصحیحات باشند.

بسادگی میتوان دریافت که احتمال وجود سیستم‌ها عبارتست از :

$$w_1=\frac{h_1}{\sqrt{\pi}}e^{-h_1^2v_1^2}\cdot dv$$

$$w_2=\frac{h_2}{\sqrt{\pi}}e^{-h_2^2v_2^2}.dv \qquad (1)$$

$$w_n=\frac{h_n}{\sqrt{\pi}}e^{-h_n^2v_n^2}.dv$$

که درآنها w_i احتمال وجود v_i برابر است با

$$w(v)=\varphi(v).\ dv \qquad (2)$$

که $\varphi(v)$ تابعی است که احتمال نسبی v معینی‌را تعیین نموده و dv طول باندی است که v در روی‌آن تغییرمینماید (از v_i تا v_i+dv) مقدار h ثابتی است که از رابطه زیرحاصل میشود.

$$-h^2=\frac{1}{2}k^2=1/2\left(\frac{d\ln\varphi(v_i)}{v_i\ dv_i}\right)^2$$

جمله

$$\varphi(v)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2} \qquad (3)$$

به «قانون خطای گاوس» معروف است.

ε دررابطه (۳) عبارتست از:

$$\varepsilon_i=x-l_i \qquad (4)$$

l_i اندازه‌گیریهای مستقل برای یک مجهول و x معدل ریاضی آنها است.

اگر x را «محتمل ترین‌مقدار» برای قرائت‌های انجام شده درنظر بگیریم، بنابراین احتمال‌تعیین سیستم خطاهای ε_i ماکزیمم است و با توجه بقوانین حساب احتمالات چون احتمال برخورد قرائت های مستقل ازیکدیگر برابر باحاصل‌ضرب احتمال هریک از قرائت‌های ذکرشده‌است‌بنابراین باتوجه‌برابطه(۲) میتوان نوشت:

$$\varphi(\varepsilon_1)\,d\varepsilon.\ \varphi(\varepsilon_2)\,d\varepsilon\cdots\cdots\cdots\varphi(\varepsilon_n)\,d\varepsilon=\max \qquad (5)$$

حال اگر رابطه (٤) را برای سیستم v_i حاصل از رابطه (١) تعمیم دهیم خواهیم داشت.

$$\frac{h_1 h_2 \cdots\cdots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} . e - (h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2 v_n^2) = \max \quad (٦)$$

رابطه (٦)زمانی ماکزیمم است که:

$$h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2 v_n^2 = \min \qquad (٧)$$

باشد.

ازطرفی میتوان ثابت کرد که ثابت h^2 باضریب اندازه گیری (وزن هراندازه گیری) متناسب است بطوری که اگر «وزن» هراندازه گیری را با p نمایش دهیم درمورد اندازه گیری های با « اوزان » مختلف خواهیم داشت.

$$v_1^2 p_1 \times v_2^2 p_2 + \cdots\cdots + v_n^2 p_n = [vvp] = \min \qquad (٨)$$

ویا برای اندازه گیریهای بااوزان (ضرائب) مساوی رابطه(٨) بصورت زیر درمیآید.

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots\cdots + v_n^2 = [vv] = \min \qquad (٩)$$

٤-٢- تعیین معادلات خطا:

مهمترین قسمت یک تعدیل تعیین معادلات خطا یاتعیین رابطه‌ای است بین مقادیراندازه گیری شده ومجهولات.

اگر L_i قرائت‌های انجام شده، v_i تصحیح های قرائت تعدیلی و x ، y ، z ، t « محتمل‌ترین مقدار» مجهولات‌باشند، معادلات خطای ابتدائی بصورت زیر خلاصه میشود.

$$L_i + v_i = f_i\,(x, y, z, t, \cdots\cdots) \qquad (١٠)$$

که درآن $i =$ ١،٢،٣،٠٠٠،n و f یک تابع خطی یاغیرخطی است. مهمترین مسأله دریک‌تعدیل تبدیل معادلات غیرخطی به‌معادلات خطی بکمک سری تایلر یامحاسبات لگاریتمی است .بنابراین درابتدای هر «تعدیل» باید توجه داشت که بوسیله‌ای رابطه خطی بین قرائت‌های انجام شده ومجهولات تعیین کرد.

٤-٢-١-انتخاب مجهول:

انتخاب مجهول برحسب نوع اندازه گیری متفاوت است . دراندازه گیری مسافت ضرائب ثابت جمع یاضرب‌را بعنوان مجهول انتخاب میکنند درحالیکه دراندازه گیری برای مقایسه ساعت «نقطه‌ایست یا دریفت ساعت» ودرمورد اندازه گیری با دوربین های فتوگرامتری «ضریب ثابت دوربین» و «مختصات نقاط

اصلی عکس» وبالاخره درمورد اندازه گیریهای ارتفاعی یاجاذبه «ارتفاع یاجاذبه نامعین» ویا « اختلاف ارتفاع یاجاذبه نامعین» رابعنوان مجهول اختیار مینمایند.

درمورد ترازیابی هندسی علاوه براین ضریب رفراکسیون نیزبعنوان مجهول درمعادلات خطاظاهر میگردد.

٤-٢-٢-معادلات خطای خطی.

اگرمعادلات خطای ابتدائی خطی باشند آنرا بصورت زیر تغییرشکل میدهیم.

$$L_i + v_i = a_i x + b_i y + c_i z \qquad (١١)$$

ازنظر اینکه بااعداد کوچکتری درمحاسبات سروکار داشته باشیم میتوان بوسیله روابط زیرمقادیر تقریبی x_o و y_o و z_o را تعیین کرد.

$$x = x_o + \delta x \;,\; y = y_o + \delta y \;,\; z = z_o + \delta z$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$v_i = a_i \delta x + b_i \delta y + c_i \delta z - (L_i - a_i x_o - b_i y_o - c_i z_o)$$

واگرمقادیر داخل پرانتز را به l_i نمایش دهیم.

$$-l_i = -(L_i - a_i x_o - b_i y_o - c_i z_o) \qquad (١٢)$$

ومعادلات خطای «تغییرشکل یافته» بصورت زیرخلاصه میشود.

$$v_i = a_i \delta x + b_i \delta y + c_i \delta z - l_i \qquad (١٣)$$

دراین معادله a_i و b_i و c_i پارامترهای معادله و l_i «جمله های مطلق»نامیده میشوند.

٤-٢-٣- معادلات غیرخطی:

اگرمعادلات خطای ابتدائی غیرخطی باشند ابتدا بوسیله‌ای مثلاً بسط تایلر آنرا برای مجهولات متعدد موجود خطی مینمائیم . فرض کنیم x_o و y_o و z_o مقادیر تقریبی مجهولات باشند که بوسیله چند اندازه گیری میتوان آنهارا تعیین کرد. بنابه‌رابطه (١٠) میتوان نوشت:

$$L_i + v_i = f_i(x_o + \delta x \,,\, y_o + \delta y \,,\, z_o + \delta z) \qquad (١٤)$$

اگر«مقادیر تقریبی»بخوبی ونزدیک بمقدار واقعی مجهول انتخاب شده باشند میتوان ازمشتق های مرتبه بالا صرفنظر کرد ونوشت.

$$L_i + v_i = f_i(x_o \,,\, y_o \,,\, z_o) + (\delta f_i/\delta x)_o \delta x + (\delta f_i/\delta y)_o \delta y + (\delta f_i/\delta z)_o \delta z \qquad (١٥)$$

حال مینویسیم

$$(\delta f_i/\delta x)_o = a_i \quad (\delta f_i/\delta y)_o = b_i \quad (\delta f_i/\delta z)_o = c_i \qquad (۱۶)$$

و

$$-(L_i - f_i(x_o, y_o, z_o)) = -l_i$$

بنابراین معادله خطای تغییرشکل یافته بازبصورت (۱۳) درمیآید یعنی

$$v_i = a_i\delta x + b_i\delta y + c_i\delta z - l_i \qquad (۱۷)$$

۴-۳ـ تعیین معادلات نرمال وحل آنها:

ازمعادلات خطای «خطی» یا «خطی شده» باید «مناسب‌ترین مقدار»مجهول‌را تعیین نمود. برای سادگی مطلب درمعادله (۱۳) بجای δx (بدون آنکه مفهوم ذکرشده قبلی‌را درموردآن فراموش‌نمائیم) مقدار x را قرارمیدهیم، بنابراین معادلات خطای خطی بصورت زیر درمیآیند:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1x + b_1y + c_1z - l_1 \\ v_2 &= a_2x + b_2y + c_2z - l_2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (۱۸) \\ v_n &= a_nx + b_ny + c_nz - l_n \end{aligned}$$

اگرتعداد مجهولات‌را به U نمایش دهیم چون معمولا $U \ll n$ است تعداد معادلات ازتعداد مجهولات زیادتر است وبناباًنچه سابقاً ذکرشد باید برای تعیین مجهول

$$[vv] = \min$$

باشد.

اگر معادلات خطارا مربع کرده و بایکدیگر جمع نمائیم مقدار $[vv]$ بدست میآید . یعنی

$$\begin{aligned} [\Lambda v] = [aa]x^2 + 2[ab]xy + 2[ac]xz - 2[al]x & \\ + [bb]y^2 + 2[bc]xz - 2[bl]y & \qquad (۱۹) \\ + [cc]z^2 - 2[cl]z & \\ + [ll] & \end{aligned}$$

برای تعیین می‌نیمم مشتق تابع فوق‌را تعیین میکنیم.

$$\begin{aligned} \delta[vv]/\delta x &= 2[aa]x + 2[ab]y + 2[ac]z - 2[al] \\ \delta[vv]/\delta y &= 2[ab]x + 2[bb]y + 2[bc]z - 2[bl] \\ \delta[vv]/\delta z &= 2[ac]x + 2[bc]y + 2[cc]z - 2[cl] \end{aligned}$$

اگراین مشتق‌هارا برابر صفر قرار دهیم « معادلات نرمال » Normal Equations بدست میآید.

$$
\begin{aligned}
&(A)\quad [aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]=O\\
&(B)\quad [ab]x+[bb]y+[bc]z-[bl]=O \qquad (۲۰)\\
&(C)\quad [ac]x+[bc]y+[cc]z-[cl]=O
\end{aligned}
$$

مقادیر [aa] و [ab] و..... را پاراسترهای معادلات نرمال و [al] – و [bl] – و..... راجملات مطلق این معادلات گویند.

این نوع معادلات نرمال‌را میتوان بسادگی به‌سیستم معادلات نرمال باچهار یاپنج‌ویا n مجهول تعمیم‌داد.

۴-۳-۱- حل معادلات نرمال.

سیستم معادلات نرمال باسه‌مجهول‌را میتوان بکمک دترمینان ها حل نمود ولی‌درسیستم‌معادلات نرمالی‌که‌مجهول ها ازچهار به‌بالا باشداز«طریقه محاسبه پیشنهادی گاوس» که‌به Gauss's Algorithms معروف است‌استفاده مینمایند.

باین ترتیب مجهولات‌را یک‌به‌یک حذف نموده و درآخرکار آخرین مجهول را تعیین نموده و سپس عمل‌را برای تعیین‌سایرمجهولات درجهت عکس انجام میدهیم. برای‌این کار معادلات نرمال فرمول (۲۰)را به (A) و (B) و (C) نشان‌داده وبرای حذف x معادله (A) را در [ab]/[aa] – ضرب‌نموده دراین‌صورت معادله‌ای بدست میآید که ضریب x درآن [ab] – است سپس معادله (A) را در [ac]/[aa] – ضرب مینمائیم ومعادله‌ای خواهیم داشت که ضریب x درآن [ac] – است.

حال چنانچه معادله اول بدست‌آمده را بامعادله نرمال (B) ومعادله‌دوم‌را بامعادله نرمال(C) جمع نمائیم سیستم معادلات «یک‌بار تعدیل» شده بشرح زیرحاصل میگردند.

$$
\begin{aligned}
&([bb]-[ab]/[aa].[ab])y+([bc]-[ab]/[aa].[ac])z-\\
&-([bl]-[ab]/[aa].[al])=O \qquad (۲۱)\\
&([bc]-[ac]/[aa].[ab])y+([cc]-[ac]/[aa].[ac])z-\\
&-([cl]-[ac]/[aa].[al])=O
\end{aligned}
$$

گاوس معادلات فوق‌را بطریق زیر نیزنوشته است:

$$\begin{aligned} &B.1 \quad [bb.1]y+[bc.1]z-[al.1]=O \\ &C.1 \quad [bc.1]y+[cc.1]z-[cl.1]=O \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

منظوراز [bb.1] یا [bc.1] پارامترهای [bb] ویا [bc] است که یکبار تعدیل شده‌اند.

اگر باین ترتیب عمل شود مجهولهای x و y و z بشرح زیر قابل محاسبه‌اند

$$\begin{aligned} &z=+[cl.۲]/[cc.۲] \\ &y=+[bl.1]/[bb.1]-[bc.1]/[bb.1].z \\ &z=+[al]/[aa]-[ac]/[aa].z-[ab]/[aa].y \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

باروش مخصوص گاوس میتوان تعدیل را بطورکلی کنترل کرده و باتشکیل مجموعه های [v] و [vv] هرتعدیلی‌را کنترل نمود.

بآسانی میتوان ثابت کرد که درپایان هرتعدیلی تساوی بازرسی زیر باید برقرار باشد.

$$[ll.۳]=[vv] \qquad (۲٤)$$

و یادرحالت کلی:

$$[ll.U]=[vv]$$

که درآن U تعداد مجهول‌های موردنظر است.

معادلات (۲٤) را معادلات بازرسی [vv] گویند.

٤ـ٤ـ تعدیل مشاهدات سیستم با «اوزان» مختلف

اگر مقادیر اندازه گیری‌شده دارای اوزان ویا «ضرایب» مختلف باشند بنابآنچه تابحال گفته شد باید شرط:

$$[vvp]=\min.$$

برقرار باشد. برای این کار به‌ترتیب زیرعمل مینمائیم:

الف ـ معادلات خطارا بصورت زیرمینویسیم:

$$L_i+v_i=x \qquad p_i \text{ باوزن} \qquad (۲۵)$$

ب ـ این معادلات پس‌از تغییرشکل بصورت‌زیر درمیآید.

$$\begin{aligned} &x=x_o+\delta x \;,\; -l_i=-(L_i-x_o) \\ &v_i=\delta x-l_i \qquad p_i \text{ باوزن} \end{aligned} \qquad (۲٦)$$

درفرمول (۲۶) x_o یک مقدار تقریبی برای x است.

ج- معادلات نرمال- برای اینکه [pvv] مینیمم باشد بااستفاده ازفرمول (۲۳) معادلات نرمال (Normal Equations) را تشکیل میدهیم.

$$\begin{aligned} [vvp] &= [p]\delta x^{2} + [llp] - 2\delta x[lp] \\ d[vvp]/d\delta x &= 2[p]\delta x - 2[lp] = O \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

سپس این معادلات‌را بصورت زیرخلاصه میکنیم.

$$[p]\delta x - [lp] = O \qquad (۲۸)$$

ویا

$$\delta x = [lp]/[p] \qquad (۲۹)$$

د- محاسبه v و [vvp] از رابطه (۲۴) باتوجه بمعادله کنترل زیرمحاسبه میگردد.

$$[vp] = O$$

هـ- برای امتحان صحت تعدیل شرائط امتحانی [vvp] را بصورت زیرخلاصه میکنیم.

$$\begin{aligned} [vvp] &= [llp] - [lp]\delta x \\ [vvp] &= [llp] - [lp]^{2}/[p] \end{aligned} \qquad (۳۰)$$

و- محاسبات خطا ازفرمولهای زیرحاصل میشود. برای خطای متوسط اندازه‌گیریهای با «وزن» ۱ فرمول:

$$m_o = \pm\sqrt{\frac{[vvp]}{n-1}}) \qquad (۳۱)$$

وبرای خطای متوسط «معدل ریاضی کلی» فرمول:

$$m_x = \frac{m_o}{[p]^{1/2}} = \pm(\ [vvp]/[p](n-l)\ )^{1/2} \qquad (۳۲)$$

بکار برده میشوند.

۴-۵- تعدیل باروش«تعدیل مرحله‌ای»روش‌مخصوص گاوس- فوگلر

دربعضی موارد تعدیل باروش مرحله‌ای (Iteration) خیلی سریعترعملی‌میگردد. دراین روش اگرمعادلات تعدیل اولیه‌را بادقت کافی تشکیل دهیم نتیجه تعدیل تقریباً همان دقت سایرروشهای‌تعدیل را دارا است. این روش‌را میتوان بدون تشکیل معادلات نرمال بکاربرد. مورد استفاده این روش هنگامی است که بخواهیم یک تعدیل‌را بادقت کافی و باسرعت زیاد انجام دهیم. حسن این روش‌اینست که‌درآن احتیاجی بوجود ماشین محاسبه یابرنامه‌ریزی نبوده وحتی درحین عملیات صحرائی میتوان آنرا بکاربست.

دراین‌جا بدون اینکه‌وارد جزئیات تئوری این تعدیل شویم روشی‌را که برای‌شبکه‌های‌ترازیابی استفاده میگردد ونگارنده آنرا درشبکه‌های جاذبه بکار بسته است خیلی مختصر ذکرمیکنیم. درشبکه‌های ترازیابی یاجاذبه چون شرایط تعدیلی بسیارساده میباشند ازکار برد معادلات نرمال صرفنظر مینمائیم.

درتعدیل مرحله‌ای گاوس بایک ابتکار بسیار جالب درمجاورت شرایط مدار های بسته شرایط مدار بسته‌محیطی‌را نیزدخالت داده‌که خطای‌حاصل دراین مدار بسته محیطی‌برابراست بامجموع خطاهای حاصل‌از مدارهای بسته داخلی شبکه. این شرط برای همگرائی معادلات خطابسیارمفید است.

طبق آنچه درجدول ۱ (متن‌انگلیسی این‌مقاله)مشاهده میگردد به‌اختلاف‌گرانی نقاط مختلف‌که اضلاع مدارهای هرشبکه‌را تشکیل میدهند ضرائب (اوزان) $P=\frac{1}{s}km$ نسبت‌داده شده وخطای‌هرمدار باتوجه به‌جهت مثبت انتخاب شده تعیین گردیده است. برای اختلاف‌گرانی‌های غیرقابل‌تغییرنظیراضلاع ۹ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۶۰ ضرائب مربوط بینهایت درنظرگرفته شده یعنی $o=\frac{1}{p}$ است.

حال‌برای هرمدار مقدار $w^2/[s]$ محاسبه گردیده ودرستون اول تعدیل‌نوشته میگردد. باتوجه بخطای‌مربوط به‌هرمدار w بزرگترین مقدار $[w]^2/[s]$ انتخاب گردیده وبرای مدار مربوطه تقسیم خطا بطوری صورت میگیرد که w مربوط برابر صفر گردد. تقسیم این خطا درهرشبکه به‌نسبت اضلاع و در مواردی‌که w ها کوچک است در شبکه‌های جاذبه بطورمساوی روی اضلاع تقسیم میگردد. این عمل مرحله بمرحله انجام میگردد تا w مربوط به هرمدار صفر یا فوق‌العاده کوچک گردد. هرسطر از جدول مجموع تصحیحات (مقدار خطای انتهائی v) برای هر Δg رامشخص مینمایدبااضافه کردن v به Δg های اندازه‌گیری شده مقدار Δg تعدیلی حاصل میشود.

درهرمدار بسته باید رابطه $[v]=-w$ برقرار باشد.

میانگین خطای مربوط به یک‌کیلومتر از رابطه

$$m=\pm\frac{1}{r}([vv/s])^{1/2} \qquad (32)$$

محاسبه میگردد r تعداد معادلات خطای تشکیل شده است.

٤-٦ـ محاسبه خطای میانگین یك اختلاف جاذبه تعدیل شده

برای محاسبه خطای میانگین اختلاف‌جاذبه تعدیل شده طبق‌جدول ۲ (رجوع شودبه‌متن‌انگلیسی همین مقاله)تعدیل مرحله‌ای برای عکس ضرائب اضلاع تشکیل‌دهنده مسیرانجام‌میگردد.

برای دونقطه A و B ازشبکه این خطا برابراست با

$$m_{AB}=m_{lkm}(1/p_{AB})^{1/2} \tag{۳٤}$$

P_{AB} ضریب اختلاف جاذبه تشکیل شده ازیک یاتعداد زیادی اختلاف جاذبه بین دو نقطه A و B است.
عکس ضریب P_{AB} بافرمول زیرقابل محاسبه است.

$$\frac{1}{p_{AB}}=\left[\frac{ff}{p}\right]+\left[\frac{af}{p}\right]r_a+\left[\frac{bf}{p}\right]r_b+\left[\frac{cf}{p}\right]r_c \tag{۳۵}$$

مقادیر r_a ، r_b و r_c را میتوان بطریق زیرتوجیه کرد.

v_i خطای تعدیل ها ازیکدیگر مستقل نبوده وتابعی‌از l قرائت موردنظر میباشد بااستفاده ازتئوری خطاها باید v را بطریقی حذف کرد. دراین مورد بااستفاده ازعکس وزن یعنی k معادلات وابسته‌را نوشته وسپس بااستفاده از روش تعدیل ضرائب نامعین k را نیزحذف مینمائیم.

$$v_i=a_ik_a+b_ik_b+c_ik_c \tag{۳٦}$$

بنابراین تابع مقادیر تعدیل شده (F) را بااستفاده ازمقدار:

$$f_i=\frac{\partial F}{\partial L_i}$$

بشرح زیرخلاصه مینمائیم:

$$F=f+[fl]+[af]k_a+[bf]k_b+[cf]k_c \tag{۳۷}$$

حال باتغییرشکل‌معادلات‌نرمال میتوان k را نیزحذف نمود.

$$\left.\begin{array}{l}[aa]k_a+[ab]k_b+[ac]k_c+a_\circ+[al]=o\\ [ab]k_a+[bb]k_b+[bc]k_c+b_\circ+[bl]=o\\ [ac]k_a+[bc]k_b+[cc]k_c+c_\circ+[cl]=o\end{array}\right|\begin{array}{l}r_a\\ r_b\\ r_c\end{array} \tag{۳۸}$$

این معادلات درضرائب نامعین r_a ، r_b و r_c ضرب گردیده وپس‌از حل‌آنها «عکس ضریب تابع» بصورت زیر خلاصه میگردد.

$$\frac{1}{p_F}=Q_{FF}=[af]r_a+[bf]r_b+[cf]r_c+[ff]=[\alpha\alpha] \tag{۳۹}$$

درترازیابی (یادرشبکه‌های جاذبه نظیرآن) مقادیر a ، b ، c و f برابر صفر ۱+ ویا ۱− است وازطرفی مقدار $\rho_i=\frac{1}{p_i}$ ومجموعه $[ff/p]$ عبارت‌از مجموع‌طول اضلاع موجودبین دونقطه A و B موردنظراست.

$[s] = [ff/p]$ ازطرفی عکس ضریب قرائت تصحیح شده است بنابراین طرف راست عبارت (۳۴) تصحیحات γ_i مربوط به «ضرائب» را نشان میدهد یعنی معادله (۳۴) را میتوان بصورت زیرخلاصه نمود.

$$\frac{۱}{p_{ik}} = \frac{[ff]}{p} + \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \qquad (۴۰)$$

طریق تعیین γ_i درجدول شماره ۲ متن انگلیسی این مقاله قابل رؤیت است در معادلات نرمال بجای w_i «خطای اضافی ضرائب» یعنی $\overline{w_i} = \left[\frac{if}{p}\right]$ قرار داده شده است.

درمثال ذکرشده برای اختلاف جاذبه دونقطه ازبدار بسته ۱ و ۹ که توسط اضلاع ۲ و ۶۰۰ و ۳۷ و ۷۸ و ۹۱۳۰ و ۹۱۳ بیکدیگر متصل شده است عکس ضرائب محاسبه گردیده‌اند. نتایج حاصل از این محاسبه بشرح زیرخلاصه میگردند:

$m_{lk} = \pm ۰/۰۰۰۵۳$ میلی گال

$[ff/p] = ۷۳۰$

$[\gamma] = -۳۴۳$

$۱/p_{AB} = ۳۹۲$

$m_{AB} = \pm ۰٫۰۱۰$ میلی گال

۵ـ نتیجه گیری : محاسبه خطای مربوط به یک کیلومتر و همچنین محاسبه خطای اختلاف جاذبه دونقطه بفاصله دوراز شبکه که یکی برابر ۰٫۰۰۰۵۳± و دیگری ۰٫۰۱۰± میلی گال تعیین شده است ثابت نمود که:

اولا ـ کاربرد روش «تعدیل مرحله‌ای» برای شبکه های جاذبه کاملا مناسب بوده وخطای حاصله ازاین نوع تعدیل را میتوان باامتیاز «بسیارخوب» پذیرفت.

ثانیاً ـ بدون اینکه وارد محاسبات پیچیده تعدیل های معمولی ذکرشده دربندهای ۴-۱ تا ۴-۵ شویم باروش ساده تعدیل مرحله‌ای میتوانیم هریک ازشبکه های جاذبه مورد نظررا محاسبه نمائیم.

ثالثاً ـ درحین عملیات صحرائی میتوان ازروش مخصوص «گاوس ـ فوگلر» برای تعدیل مرحله‌ای بسادگی وحتی بدون کاربرد ماشین محاسبه نمود. دقت تعدیل دراین مورد هم ارز دقت تعدیل هائی است که بابرنامه های پیچیده ماشین های الکتریکی قابل محاسبه میباشند.