

بررسی معادلات ناویر-استوکس به عنوان معادلات دیفرانسیل - جبری

و حل عددی آن با روش منظم سازی دنباله‌ای

مه‌دی‌ار برفه‌ئی، سید محمد حسینی*

دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، تهران، ایران

* مسئول مکاتبات- آدرس الکترونیکی: hossei_m@modares.ac.ir

(دریافت: ۸۵/۴/۲؛ پذیرش: ۸۶/۱۰/۷)

چکیده

معادلات دیفرانسیل- جبری در بسیاری از مدل‌های فیزیکی نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کنند و از اهمیت خاصی برخوردارند. در این مطالعه پس از بررسی مشکلاتی که در حل عددی معادلات دیفرانسیل- جبری به وجود می‌آید به بررسی روش منظم سازی دنباله‌ای می‌پردازیم که می‌تواند برای حل معادلات دیفرانسیل- جبری به فرم هزنبرگ و با اندیس دو و سه، استفاده شود. در ادامه معادلات ناویر- استوکس تراکم‌ناپذیر که به طور وسیع در دینامیک سیالات مورد استفاده قرار می‌گیرند به عنوان معادلات دیفرانسیل- جبری بررسی و به کمک روش فوق حل عددی می‌شوند. یکی از مزیت‌های روش منظم سازی دنباله‌ای برای حل معادلات ناویر- استوکس، این است که شرایط اولیه برای فشار لازم نیست و نسبت به روش‌های خطی معادلات را با سختی کمتری حل می‌کند. سپس روش منظم سازی دنباله‌ای پیشگو را برای کاهش حجم محاسبات به کار برده و با روش ذکر شده مقایسه می‌کنیم. در پایان نتایج عددی آورده شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات ناویر- استوکس، دینامیک سیالات، معادلات دیفرانسیل- جبری، روش منظم سازی دنباله‌ای، روش منظم سازی دنباله‌ای پیشگو.

مقدمه

معادلات دیفرانسیل- جبری در حالت کلی، تابع برداری به فرم $F(t, x, x') = 0$ می‌باشند که در آن ماتریس $\frac{\partial F}{\partial x'}$ منفرد و x برداری n بعدی است. برای معادلات دیفرانسیل- جبری (۱) اندیس، کمترین دفعات مشتقی است که باید از سیستم گرفته شود تا x' به صورت منحصر بفردی بر حسب t و x بدست آید یا به عبارت دیگر به یک معادله دیفرانسیل معمولی برسیم (Ascher & Petzold, Martinson & Barton 2000). هر گاه اندیس سیستم بزرگتر از دو باشد سیستم را با اندیس مرتبه بالا می‌گویند. بسیاری از معادلات دیفرانسیل- جبری که در عمل ظاهر می‌شوند به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند که با یکسری قید جبری همراهند. در این نوع از سیستمها متغیرهای دیفرانسیلی و جبری به طور صریح مشخص شده‌اند و به معادلات دیفرانسیل جبری با فرم هزنبرگ مشهورند (Ascher & Petzold 1946). در این مقاله معادلات هزنبرگ به فرم زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$U_t + (U \cdot \text{grad})U = \frac{1}{\text{Re}} \Delta U - \text{grad}p + f$$

$$\text{div}U = 0 \quad (3)$$

$$U|_{\partial\Omega} = b \quad U|_{t=0} = a$$

با مقایسه معادلات (۲) و (۳) دیده می‌شود که عملگر div متناظر با ماتریس G و عملگر grad متناظر با ماتریس B است. بنابراین معادلات ناویر- استوکس تراکم‌ناپذیر دو بعدی دارای اندیس دو است. این امکان وجود دارد که با کمک روش‌های کاهش اندیس معادلات دیفرانسیل- جبری را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کنیم و سپس به حل این معادلات بپردازیم ولی این چنین دستکاریهایی باعث ایجاد ناپایداریهایی در حل این معادلات می‌شود. این ناپایداریها با افزایش زمان خود را آشکارتر می‌کند و جوابی به ما می‌دهد که هر چند در معادلات دیفرانسیلی صدق می‌کند ولی در قیده‌های جبری

معادلات دیفرانسیل- جبری در حالت کلی، تابع برداری به فرم $F(t, x, x') = 0$

می‌باشند که در آن ماتریس $\frac{\partial F}{\partial x'}$ منفرد و x برداری n بعدی است. برای معادلات دیفرانسیل- جبری (۱) اندیس، کمترین دفعات مشتقی است که باید از سیستم گرفته شود تا x' به صورت منحصر بفردی بر حسب t و x بدست آید یا به عبارت دیگر به یک معادله دیفرانسیل معمولی برسیم (Ascher & Petzold, Martinson & Barton 2000). هر گاه اندیس سیستم بزرگتر از دو باشد سیستم را با اندیس مرتبه بالا می‌گویند. بسیاری از معادلات دیفرانسیل- جبری که در عمل ظاهر می‌شوند به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند که با یکسری قید جبری همراهند. در این نوع از سیستمها متغیرهای دیفرانسیلی و جبری به طور صریح مشخص شده‌اند و به معادلات دیفرانسیل جبری با فرم هزنبرگ مشهورند (Ascher & Petzold 1946). در این مقاله معادلات هزنبرگ به فرم زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) - B(t)y \quad (2)$$

$$0 = G(t)x + r(t) \equiv g(x, t)$$

که $f: R^n \times R \rightarrow R^n$, $y \in R^m$, $x \in R^n$, $t \in R$

و $g: R^n \times R \rightarrow R^m$ توابع برداری و $B: R \rightarrow R^n \times R^m$

۳. تکنیک پایداری بام گارت

در سال ۱۹۷۰ بام گارت محدودیت رابطه (۴) را با محدودیت زیر برای یک مساله DAE با اندیس دو جایگزین کرد (Baumgarte 1972):

$$\alpha_1 \frac{d}{dt} g(x, t) + \alpha_2 g(x, t) = 0 \quad (۵)$$

که α_1 و α_2 هر دو غیر منفی می‌باشند. با توجه به اینکه در (۵) $\alpha_2 > 0$ ، مقدار $\|g(x, t)\|$ به طور نمایی بر حسب زمان کاهش می‌یابد و مشکل ناپایداری رفع می‌شود. تکنیک پایداری بام گارت به طور وسیع، برای حل معادلات DAE مورد استفاده قرار گرفته است اما مشکل آن، این است که همواره انتخاب پارامترهای α_1 براحتی صورت نمی‌گیرد و انتخاب نامناسب این پارامترها ممکن است باعث حل نه چندان مناسب مسأله شود.

اما روش بام گارت ایده مهمی است برای روش منظم سازی دنباله‌ای که می‌تواند برای معادلات DAE با اندیس بالا و به فرم (۲) مورد استفاده قرار گیرد.

۴. روش منظم سازی دنباله‌ای

ایده اصلی روش این است که به جای حل یک مسأله سخت، دنباله‌ای از معادلات را که از سختی کمتری برخوردارند حل کنیم. روش SRM می‌تواند به عنوان روشی کاملاً صریح انجام شود. در این قسمت الگوریتم این روش را ارائه می‌کنیم که به حل معادلات DAE با اندیس دو می‌پردازد. روش SRM برای معادلات DAE با اندیس سه نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد (Ascher & Lin 1996). روش SRM بر پایه ایده‌هایی از کار بام گارت و روشهای عددی برای بهینه سازی مسائل مقید (Arrow et al. 1968)، استوار است. این روش برای معادلات DAE با اندیس دو به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} (x_\sigma)' &= f(x_\sigma, t) - B(x_\sigma, t) \left(y_{\sigma-1} + \frac{1}{\varepsilon} T(x_\sigma, t) \left[\alpha_1 \frac{d}{dt} g(x_\sigma, t) + \alpha_2 g(x_\sigma, t) \right] \right) \\ y_\sigma &= y_{\sigma-1} + \frac{1}{\varepsilon} T(x_\sigma, t) \left[\alpha_1 \frac{d}{dt} g(x_\sigma, t) + \alpha_2 g(x_\sigma, t) \right] \end{aligned} \quad (۶)$$

x_σ و y_σ $\sigma = 1, 2, \dots, m$ دنباله‌ای از توابع می‌باشند که به x و y همگرا می‌باشند. ماتریس T و پارامتر ε ، به ترتیب ماتریس و پارامتر منظم سازی می‌باشند. در ادامه خواهیم دید که مقدار ε می‌تواند $O(h)$ اختیار شود و بنابراین ε زیاد کوچک نخواهد بود. مقادیر α_1 و α_2 را پارامترهای بام گارت می‌گویند.

هرگاه $\alpha_1 = 0$ باشد، روش صریح خواهد بود و در معادلاتی که $\frac{d}{dt} g = 0$ منفرد باشد انتخاب $\alpha_1 = 0$ مناسب می‌باشد (Ascher & Lin 1997). هرگاه $\alpha_1 = 0$ انتخاب شود، (۶) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x_\sigma)' = f(x_\sigma, t) - B(x_\sigma, t) \left(y_{\sigma-1} + \frac{1}{\varepsilon} T(x_\sigma, t) g(x_\sigma, t) \right) \quad (الف)$$

صدق نمی‌کند. روشهای مختلفی برای رفع این مشکل وجود دارد که از معروفترین آنها تکنیک پایداری بام گارت می‌باشد (Lin et al., 2003; Baumgarte 1972).

در بخش دوم روش منظم سازی را همراه با محدودیت‌هایی که برای حل معادلات DAE دارد بررسی می‌کنیم. سپس به معرفی روش منظم سازی دنباله‌ای می‌پردازیم که می‌تواند برای حل معادلات DAE با اندیس دو و سه به کار رود و نسبت به روش منظم سازی، معادلات را با سختی کمتری حل می‌کند. هدف اصلی این مقاله حل معادلات ناویر-استوکس به کمک روش منظم سازی دنباله‌ای است. یکی از مزیت‌های روش فوق برای حل معادلات ناویر-استوکس این است که شرایط اولیه برای فشار لازم نیست و این از آن جهت که یافتن شرایط اولیه برای فشار همواره به راحتی صورت نمی‌گیرد حائز اهمیت است. علاوه بر این روش را می‌توان به صورت صریح پیاده سازی کرد. با توجه به صریح بودن روش نیاز است تا Δt کوچک اختیار شود از طرفی کوچک بودن Δt باعث افزایش حجم محاسبات می‌شود. برای رفع این مشکل روش منظم سازی دنباله‌ای پیشگو را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که نسبت به روش منظم سازی دنباله‌ای هزینه محاسبات کمتری دارد. کارایی این روش را با حل مسأله‌ای که جواب دقیق آن را داریم نشان می‌دهیم.

۲. منظم سازی

منظم سازی، روشی را ارائه می‌دهد که بدون مشتق گرفتن از یک مسأله DAE آنرا به یک مسأله ODE تبدیل کنیم و با مشکل ناپایداری مواجه نشویم (Macdonald 2001).

معادله دیفرانسیل-جبری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x' &= f(x, t) - B(x, t)y \\ 0 &= g(x, t) \end{aligned} \quad (۴)$$

اگر محدودیت (۴) را با $\varepsilon T^{-1}(x, t)y' = g(x, t)$ ، و یا به طور معادل با $y' = \frac{1}{\varepsilon} T(x, t)g(x, t)$ جایگزین کنیم به یک مسأله ODE می‌رسیم. در اینجا ε و $T(x, y)$ به ترتیب پارامتر و ماتریس منظم سازی می‌باشند (Baumgarte 1972). پارامتر ε مقداری بسیار کوچک است. به طوری که $\varepsilon T^{-1}(x, t)y' \approx 0$. بنابراین جایگزینی فوق محدودیت مسأله را برآورد می‌کند. اما مشکل منظم سازی این است که ε مقداری کوچک است و مقادیر کوچک ε باعث سخت شدن مسأله می‌شوند و برای حل این مسائل نیازمند انتخاب طول گامهای بسیار کوچک را در روشهای صریح داریم. برای رفع این مشکل از تکنیک پایداری بام گارت استفاده می‌کنیم.

$$\|x_m(t) - x(t)\| = O(\Delta x^p)$$

$$y_\sigma = y_{\sigma-1} + \frac{1}{\varepsilon} T(x_\sigma, t) g(x_\sigma, t) \quad (۷ب)$$

با توجه به (۷) داریم $\varepsilon T^{-1}(y_\sigma - y_{\sigma-1}) \approx 0 = g(x_\sigma, t)$ که همان شرط (۷ب) است. مقادیر اولیه داده شده برای x باید مشخص باشند و همان شرایط اولیه مسأله می‌باشند. همچنین یک مقدار اختیاری دلخواه برای y ، به عنوان مقدار اولیه باید تعیین شود، که معمولاً $y \equiv 0$ اختیار می‌شود. در ادامه الگوریتم روش آمده است.

۵. الگوریتم روش SRM

مقادیر اولیه برای x باید معین شده باشند و آنها را با x_1^0 نشان می‌دهیم و $y_0^0 = 0$ مقدار اولیه متغیر جبری y می‌باشد. در این الگوریتم x_σ^n و y_σ^n نشان دهنده مقادیر $x_\sigma(t_n)$ و $y_\sigma(t_n)$ می‌باشند. الگوریتم روش SRM به صورت زیر می‌باشد:

الف- قرار دهید $x_\sigma^0 = x_1^0$ برای $\sigma = 2, 3, \dots, m$.

ب- از x_σ^0 استفاده کنید تا (۷ب) را برای بدست آوردن y_σ^0 ، $\sigma = 1, 2, 3, \dots, m$ حل نماید.

در هر بازه $[t_n, t_{n+1}]$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$ ، الگوریتم زیر را برای $\sigma = 1, 2, 3, \dots, m$ تکرار کنید.

۱- با توجه به اینکه مقدار $\alpha_1 = 0$ است، به کمک (الف) مقدار x_σ^{n+1} را محاسبه نمایید.

۲- از رابطه (۷ب) استفاده نمایید تا با کمک x_σ^{n+1} ، $y_{\sigma-1}^{n+1}$ و y_σ^{n+1} را بدست آورید. دقت کنید در هر پله زمانی مقدار y_0^{n+1} را می‌توان به صورت دلخواه انتخاب کرد که معمولاً y_0^{n+1} صفر انتخاب می‌شود.

۶. خطای روش SRM

اشر و لین (Ascher & Lin 1996, Ascher & Lin 1997) نشان دادند که خطای روش SRM برای حل معادله:

$$\begin{aligned} x' &= f(x, t) - B(t)y \\ g(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

به صورت زیر است:

$$\|x_m(t) - x(t)\| = O(\varepsilon^m) + O(\Delta x^p)$$

که ε پارامتر منظم سازی، Δx طول گام، m تعداد تکرارهای روش SRM در هر پله زمانی و P مرتبه روشی است که معادلات دیفرانسیلی را با آن حل می‌کنیم. بنابراین با انتخاب $\varepsilon = \Delta x$ و $m = p$ برای پارامترها، مقدار خطا به صورت زیر می‌باشد:

۷. الگوریتم SRM برای معادلات ناویر - استوکس

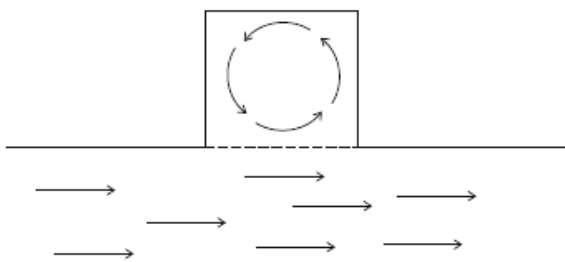
معادلات تراکم‌ناپذیر ناویر - استوکس به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} U_t + (U \cdot \text{grad})U &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta U - \text{grad}p + f \\ \text{div}U &= 0 \\ U|_{\partial\Omega} &= b \quad U|_{t=0} = a \end{aligned} \quad (۸)$$

در اینجا Re عدد رینولدز و معادلات بی‌بعد می‌باشند. با پیاده سازی روش SRM با $\alpha_1 = 0$ برای معادلات فوق به دنباله‌ای از معادلات PDE به صورت زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \varepsilon(U_\sigma)_t - \text{grad}(\text{div}U_\sigma) + \varepsilon(U_\sigma \cdot \text{grad})U_\sigma &= \varepsilon \frac{1}{\text{Re}} \Delta U_\sigma - \varepsilon \text{grad}P_{\sigma-1} + \varepsilon f \\ P_\sigma &= P_{\sigma-1} - \frac{1}{\varepsilon} \text{div}U_\sigma \\ U_\sigma|_{t=0} &= a \end{aligned} \quad (۹)$$

اکنون با کمک روشهای تفاضلات متناهی به گسسته‌سازی معادلات (۹) می‌پردازیم. به عنوان مثال ناحیه مربعی شکل (۱) که سیال با سرعت ثابت در قسمت پایین آن حرکت می‌کند، را در نظر بگیرید (Lin et al. 2003).



شکل ۱- مسیر حرکت سیال.

حرکت سیال در قسمت پایین، باعث ایجاد چرخش در حفره مربعی شکل می‌شود. سرعت و فشار در این ناحیه با معادلات (۸) بیان می‌شوند. شرایط اولیه مسأله به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} (u, v)^T &= (0, 0)^T && \text{در بالا دو طرف ناحیه مربعی} \\ (u, v)^T &= (1, 0)^T && \text{در پایین ناحیه مربعی} \\ \text{در زمان شروع حرکت سیال، و به ازای تمام مقادیر داخل ناحیه مربع} \\ (u, v)^T &= (0, 0)^T && \text{شکل} \end{aligned}$$

۸. یک ایده تفاضلی برای حل معادلات ناویر - استوکس

هرگاه که $\Delta y, \Delta x, \Delta t$ نشان دهنده طول گام در زمان و مکان باشند نقاط شبکه را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x \quad i = 0, 1, \dots, N_x \\ y_j &= j\Delta y \quad j = 0, 1, 2, \dots, N_y \quad t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N_t \end{aligned}$$

تکرارهای روش SRM در هر پله زمانی برابر با مرتبه روشی است که با استفاده از آن معادلات دیفرانسیلی حل می‌گردند. در برخی حالتها که برای حل معادلات دیفرانسیلی لازم است روشهای مرتبه بالا مورد استفاده قرار گیرد با توجه به وابستگی m به مرتبه روش حل کننده معادلات دیفرانسیلی، تعداد تکرارها در هر پله زمانی زیاد خواهد بود. زیاد بودن تعداد تکرارها در هر پله زمانی باعث افزایش هزینه محاسبات و در نتیجه ناکارایی روش SRM می‌گردد. لین و اسپیتری (Lin & Spiteri 2001) برای رفع این مشکل به معرفی روش منظم سازی دنباله‌ای پیشگو (PSRM) پرداختند که بهینه شده روش منظم سازی دنباله‌ای است و تفاوت آن با روش SRM این است که در هر پله زمانی یک حدس اولیه مناسب برای متغیر جبری انتخاب می‌شود و با این عمل در هر پله زمانی تنها یک تکرار انجام می‌دهیم یا به عبارت دیگر همواره $m=1$ انتخاب می‌کنیم. آنها همچنین روشهای متفاوتی را برای پیشگویی متغیر جبری ارائه دادند. یکی از این روشها، روش پیشگویی ساده است و زمانی که متغیر جبری به طور پیوسته تغییر می‌کند این روش پیشگویی بسیار مفید است (Macdonald 2001). با توجه به هموار بودن متغیر جبری، مقدار این متغیر در پله زمانی قبل به عنوان یک مقدار مناسب در پله زمانی جدید مورد استفاده قرار می‌گیرد و با یک بار اصلاح یا به عبارتی انتخاب $m=1$ می‌توان مقدار دقیقتری از متغیر جبری را نسبت به روش SRM بدست آورد. در معادلات ناویر-استوکس با توجه به اینکه با افزایش زمان فشار به صورت پیوسته تغییر می‌کند، می‌توانیم روش PSRM را با پیشگویی ساده به کار ببریم و با انتخاب $m=1$ و انجام محاسبات کمتر به حل معادلات بپردازیم. در این صورت با توجه به الگوریتم روش SRM پیاده سازی روش فوق موجب می‌شود تا حجم محاسبات در روش PSRM به $\frac{1}{m}$ حجم محاسبات در روش SRM کاهش یابد.

۱۰. بحث و نتایج عددی

در این بخش به کمک روشهای SRM و PSRM به حل دو مسأله می‌پردازیم. مسأله اول با جایگذاری مقادیر v ، p و u در (۸) و بدست آوردن f به کمک نرم افزار Maple ساخته شده است و با روش SRM حل می‌شود. مسأله دوم معادلات ناویر-استوکس (۸) است که جواب تحلیلی ندارد و به کمک روشهای SRM و PSRM با شرایط اولیه داده شده در بخش ۷ حل می‌شود. این قسمت از محاسبات با استفاده از یک دستگاه کامپیوتر رومیزی و نرم افزار برنامه نویسی C انجام شده است.

مسأله ۱:

مسأله اول با جایگذاری مقادیر زیر برای v ، p و u در (۸) و بدست آوردن

پس از بسط دادن عملگرهای موجود در رابطه (۹) اگر روش اولیو پیشرو را برای گسسته‌سازی زمانی به کار ببریم روش SRM برای حل معادلات ناویر-استوکس به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \varepsilon(u)_{i,j}^{(n+1)} &= \varepsilon(u)_{i,j}^{(n)} + \Delta t \left[\varepsilon \left(\frac{1}{\text{Re}} \Delta u - (p_x)_{\sigma-1} - (uu_x + vv_y) \right) + (u_{xx} + v_{yy}) \right]_{i,j}^n \\ \varepsilon(v)_{i,j}^{(n+1)} &= \varepsilon(v)_{i,j}^{(n)} + \Delta t \left[\varepsilon \left(\frac{1}{\text{Re}} \Delta v - (p_y)_{\sigma-1} - (uv_x + vv_y) \right) + (u_{xy} + v_{yy}) \right]_{i,j}^n \quad (10) \\ P_\sigma &= P_{\sigma-1} - \frac{1}{\varepsilon} (u_x + v_y) \\ u &= u_\sigma, v = v_\sigma \end{aligned}$$

و مشتقات u ، v ، p در (۱۰) را با استفاده از روابط تفاضلی زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (w_{xx})_{i,j}^{(k)} &= \frac{(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j})^{(k)}}{\Delta x^2} \\ (w_{yy})_{i,j}^{(k)} &= \frac{(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1})^{(k)}}{\Delta y^2} \\ (w_x)_{i,j}^{(k)} &= \frac{(w_{i+1,j} - w_{i,j})^{(k)}}{\Delta x} \\ (w_{xy})_{i,j}^{(k)} &= \frac{(w_{i,j+1} - w_{i-1,j+1})^{(k)} - (w_{i,j} - w_{i-1,j})^{(k)}}{\Delta x \Delta y} \\ (w_y)_{i,j}^{(k)} &= \frac{(w_{i,j+1} - w_{i,j})^{(k)}}{\Delta y} \\ (w_{yx})_{i,j}^{(k)} &= \frac{(w_{i+1,j} - w_{i+1,j-1})^{(k)} - (w_{i,j} - w_{i,j-1})^{(k)}}{\Delta x \Delta y} \end{aligned}$$

می‌تواند یکی از مولفه های p, v, u باشد. مقادیر اولیه فشار به ازای تمام مقادیر i و j صفر انتخاب می‌شود با این انتخاب، شرط $\int_{\Omega} p_\sigma dx dy \approx \sum_{i,j} (p_\sigma)_{i,j} = 0$ برقرار است. معمولاً روشهای صریح برای حل معادلات PDE نیاز به Δt کوچک دارند. با توجه به صریح بودن روش لازم است تا Δt به اندازه کافی کوچک انتخاب شود. انتخاب Δt هم‌رتبه با $(\min\{\Delta x, \Delta y\})^2 \varepsilon$ مناسب می‌باشد (Ascher & Lin 1996, Ascher & Lin 1997, Lin 1997). با توجه به اینکه ε می‌تواند بزرگ اختیار شود انتخاب چنین Δt در روشهای صریح منطقی است.

جمله $grad(div U_\sigma)$ در معادلات (۹)، که پس از به کارگیری روش SRM ظاهر شده است در پایداری روش موثر است (Lucht et al., 1999).

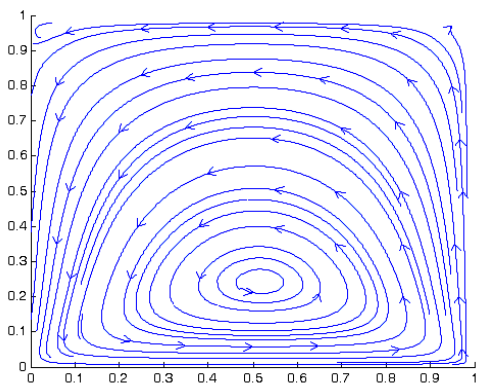
۹. روش منظم سازی دنباله‌ای پیشگو

از آنجایی که روش SRM در هر پله زمانی لازم است m مرتبه تکرار شود، بهینه نیست. همانطور که در بخش ششم بیان شد، m تعداد

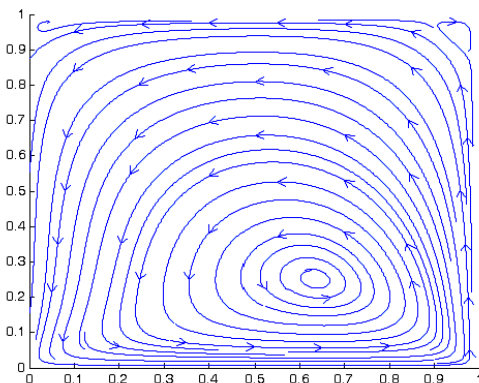
مقایسه مسیر دقیق خطوط جریان که با توجه به مشخص بودن مقادیر u و v رسم شده با خطوط جریان که به کمک روش SRM بدست آمده است، کارایی روشهای SRM و PSRM را برای حل معادلات ناویر- استوکس نشان می‌دهد.

مسئله ۲:

در این قسمت معادلات ناویر- استوکس (۸) که فاقد جواب تحلیلی می‌باشد به ازای مقادیر مختلف Re و استفاده از روشهای SRM و PSRM حل می‌شود. در اینجا $\Delta t = 2e^{-5}$ و $\varepsilon = 0/5$ اختیار و ناحیه مربعی به 64×64 قسمت تقسیم می‌شود سپس با استفاده از (۱۰) به حل معادله ناویر- استوکس می‌پردازیم. در شکلهای (۴) و (۵) میدان جریان در زمان $t=100$ به ترتیب به ازای $Re=10$ و $Re=100$ رسم شده است.



شکل ۴- خطوط جریان به ازای $Re=10$ در زمان $t=100$ که به کمک روش SRM بدست آمده است.



شکل ۵- خطوط جریان به ازای $Re=100$ در زمان $t=100$ که به کمک روش SRM بدست آمده است.

اگر $e_{i,j}$ به صورت زیر تعریف شود:

$$e_{i,j} = \frac{(u_{\sigma})_{i+1,j} - (u_{\sigma})_{i,j}}{\Delta x} + \frac{(v_{\sigma})_{i,j+1} - (v_{\sigma})_{i,j}}{\Delta y} \quad (11)$$

به کمک نرم افزار Maple، ساخته شده است و با استفاده از روش SRM حل می‌شود.

$$u = 50x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y)(1+e^{-t})$$

$$v = -50y^2(1-y)^2x(1-x)(1-2x)(1+e^{-t})$$

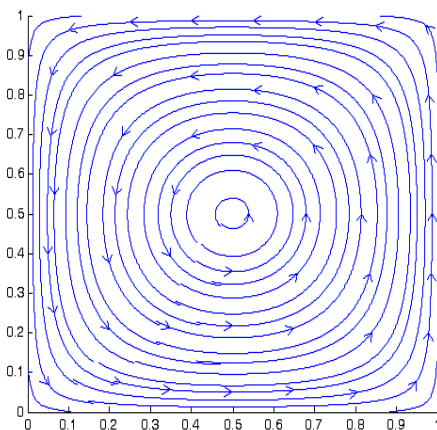
$$p = [-x(\frac{x}{2} + 2) - y(\frac{y}{2} - 2) + \frac{1}{3}](1+e^{-t})^2$$

به کمک روش SRM و انتخاب $\Delta t = 2e^{-5}$ ، $\varepsilon = 0/5$ و $Re=100$ به حل معادلات فوق می‌پردازیم. مقدار ماکزیمم خطا برای سرعت و فشار در زمان $t=1$ و به ازای مقادیر مختلف m نیز در جدول (۱) آورده شده است. با توجه به جدول بهترین نتایج زمانی که از روش SRM استفاده می‌کنیم به ازای $m=3$ و $m=4$ حاصل می‌شوند.

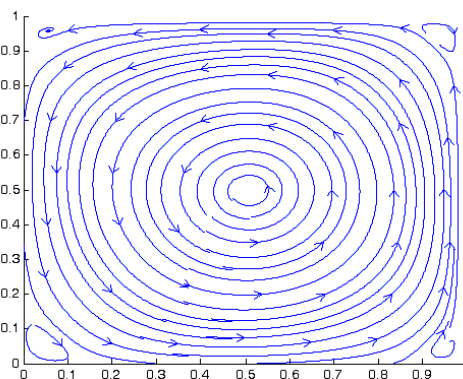
جدول ۱- ماکزیمم خطا برای سرعت و فشار در زمان $t=1$.

m	۱	۲	۳	۴
(U) ماکزیمم مقدار خطای سرعت	۰/۳۶۷۷۰	۰/۰۷۵۰۳	۰/۰۴۵۲۱	۰/۰۴۲۱۳
(P) ماکزیمم مقدار خطای فشار	۰/۷۴۳۱۳	۰/۲۵۸۳۹	۰/۱۷۸۸۳	۰/۱۶۴۸۲

همچنین مسیرهای واقعی و تقریبی جریان برای مسئله فوق در زمان $t=1$ به ترتیب در شکلهای (۲) و (۳) رسم شده است.



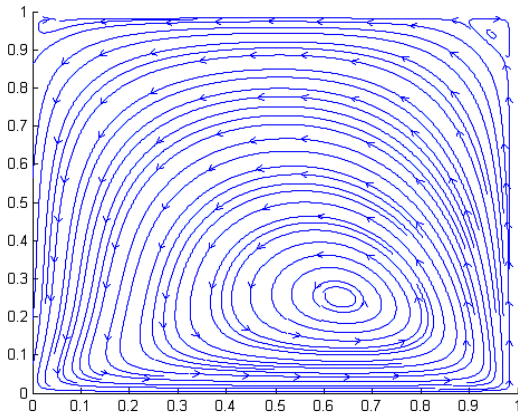
شکل ۲- مسیر دقیق خطوط جریان به ازای $Re=100$ در زمان $t=1$.



شکل ۳- خطوط جریان به ازای $Re=100$ در زمان $t=1$ که به کمک روش SRM بدست آمده است.

دقیق وجود ندارند. شکل (۶) میدان جریان را در زمان $t=100$ نشان می‌دهد که به کمک روش PSRM محاسبه شده است.

انتخاب $t=100$ از آن جهت صورت گرفته است که پایداری روشهای SRM و PSRM را برای حل معادلات- ناویر استوکس نشان دهد زیرا پس از گذشت زمانی در حدود $t=1/5$ سیال حالت پایدار پیدا خواهد کرد و خطوط جریان در زمان $t=100$ و $t=1/5$ بسیار به هم شبیه است.



شکل ۶- خطوط جریان به ازای $Re=100$ در زمان $t=100$ که به کمک روش PSRM بدست آمده است.

۱.۱. پیشنهادات

SRM و PSRM با $\alpha_1 = 0$ روشی صریح به ما می‌دهد که می‌تواند برای معادلات DAE به فرم (۲) و با اندیس دو به کار رود. در این روش نیاز به حل دستگاه جبری نداریم و زمانی که انتخاب مقادیر اولیه برای متغیرهای جبری به سادگی امکان پذیر نیست این روشها می‌توانند مفید باشند. به عنوان مثال یکی از مشکلات برای حل معادلات ناویر- استوکس، یافتن مقادیر اولیه فشار می‌باشد. در حل معادلات ناویر- استوکس با کمک روشهای RSM و PSRM مقادیر اولیه فشار، لازم نیست.

از مزایای مهم این روش آن است که می‌تواند به صورت موازی اجرا شود. تجزیه دامنه و به کارگیری روشهای موازی می‌تواند به طور چشم گیری زمان انجام محاسبات را کاهش دهد و دقت محاسبات را بالا ببرد. هرگاه k پردازنده برای حل یک سیستم خطی داشته باشیم می‌توانیم دامنه را به k زیردامنه تقسیم کنیم و روش PSRM را برای هر زیر دامنه به کار ببریم. در این صورت مقادیر در نواحی مرزی باید به پردازنده‌هایی که به این مقادیر نیاز دارند انتقال یابد. با این ایده زمان محاسبه به سرعت کاهش پیدا می‌کند، و این امکان فراهم می‌شود که به ازای $Re = 1000$ و مقادیر بزرگ t ، بتوانیم معادلات ناویر- استوکس را حل عددی نماییم، هر چند طرح (۱۰) بدون انجام محاسبات موازی برای حل معادلات ناویر- استوکس، زمانی که $Re = 1000$ باشد برای t های کوچک امکان پذیر است.

با توجه به تعریف فوق $e_{i,j}$ مقدار تقریبی برای شرط تراکم‌ناپذیری است و مقادیر آن باید بسیار نزدیک به صفر باشد. در واقع $e_{i,j}$ نشان دهنده مقدار خطای روش، برای شرط تراکم‌ناپذیری است. در جدول (۲) مقدار ماکزیمم این خطا به ازای $Re=100$ و مقادیر مختلف m در دو زمان $t=0/5$ و $t=1$ محاسبه شده است. می‌بینیم که بر خلاف روش‌های مستقیم کاهش اندیس، مقدار این خطا با افزایش زمان کاهش پیدا می‌کند که نشان دهنده پایداری روش می‌باشد. با توجه به جدول (۲) بهترین نتایج به ازای $m=3$ و $m=4$ حاصل می‌شوند. میدانهای جریان فوق نیز به ازای $m=3$ رسم شده است.

جدول ۲- مقدار ماکزیمم خطا برای شرط تراکم‌ناپذیری به ازای مقادیر مختلف m در دو زمان $t=0/5$ و $t=1$.

m	۱	۲	۳	۴
$e_{i,j}$ در زمان $t=0/5$	۱/۱۶۵E-۲	۱/۰۳۴E-۲	۶/۲۸۲E-۵	۲/۹۴۱E-۵
$e_{i,j}$ در زمان $t=1$	۸/۲۰۸E-۳	۱/۰۶۸E-۳	۲/۷۹۴E-۵	۴/۰۲۹E-۲

توجه کنیم در بکار بردن روشهای عددی باید به اندازه کافی دقت کرد. در روش SRM در هر پله زمانی مقادیر فشار صفر انتخاب می‌شود و محاسبات m مرتبه تکرار می‌گردد ولی در روش PSRM مقادیر اولیه برای فشار صفر انتخاب می‌شود و تنها در اولین گام همانند روش SRM محاسبات m مرتبه تکرار، و پس از به دست آوردن مقادیری مناسب برای فشار در پله‌های زمانی بعد، مقادیر فشار در پله‌های زمانی قبل، به عنوان یک مقدار مناسب اختیار و محاسبات تنها یک مرتبه تکرار می‌گردد تا مقادیر فشار بدست آید. در این صورت زمان محاسبات به طور چشم گیری کاهش می‌یابد. جدول (۳) زمان محاسبات را برای به دست آوردن میدان جریان در $t=100$ و به ازای $Re=100$ با استفاده از روشهای SRM و PSRM نشان می‌دهد.

جدول ۳- زمان محاسبات روشهای SRM و PSRM.

نوع روش	SRM	PSRM
زمان محاسبات (ساعت)	۸/۳	۳/۲

از دیگر نکاتی که در هنگام پیاده‌سازی روشهای SRM و PSRM باید مورد توجه قرار گیرد این است که با توجه به روابط تفاضلی که در بخش ۸ برای گسسته سازی معادلات استفاده شده، امکان بدست آوردن مقادیر فشار در مرزها همانند نقاط داخلی وجود ندارد و با توجه به اینکه فشار به طور پیوسته تغییر می‌کند مقادیر فشار در نقاط مجاور به عنوان مقدار فشار در این نقاط انتخاب می‌شود و همین باعث می‌شود در کناره‌ها خطا کمی بیشتر باشد. به همین دلیل پاسخهای نزدیک به کناره‌ها حلقه‌های بسته‌ای را نشان می‌دهد که در پاسخهای

منابع:

- Ascher U., Lin P. 1996: Sequential regularization methods for higher index DAEs with constraint singularities: linear index-2 case. *SIAM J. Numer. Anal.* **33**: 1921–1940.
- Ascher U., Lin P. 1997: Sequential regularization methods for nonlinear higher index DAEs. *SIAM J. Sci. Comput.* **18**: 160–181.
- Ascher U., Petzold L. 1996: Computer method for ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic equations. SIAM press.
- Arrow k., Hurwicz L., Uzawa H. 1968: Studies in nonlinear programming. *Stanford University Press*.
- Baumgarte J. 1972: Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.* **1**: 1-16.
- Lin P. 1997: A sequential regularization method for time-dependent incompressible Navier–Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **34**: 1051–1071.
- Lin P., Guo Q., Chen X. 2003: A fully explicit method for incompressible flow computation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **192**: 2555–2564.
- Lin P., Spiteri R.J. 2001: A predicted sequential regularization method for index-2 hessenberg DAEs. *SIAM J. Numer. Anal.* **39**: 1889-1913.
- Lucht W., Strehmel K., Eichler-Liebenow C. 1999: Indexes and special discretization methods for linear partial differential algebraic equations. *BIT.* **39**: 484–512.
- Macdonald C. 2001: The predicted sequential regularization method for differential-algebraic equations. Undergraduate Honours Thesis.
- Martinson W., Barton P. 2000: A differentiation index for partial Differential-Algebraic equations. *SIAM J. Sci. Comput.* **21**: 2295–2315.
- Taylor M.E. 1996: partial differential equations III (Nonlinear Equations). *Springer*.