مجله علوم دانشگاه تهران | جلد سی‌و سوم (۱۳۸۶) شماره ۳ (۵۱-۴۷)

مجموعه های به هم آمیخته و توابع با مجموعه-حدی یکتا

مسعود صباغان،* سعید شعبانی
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، پردیس علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران
* مسئول مکاتبات- آدرس الکترونیکی: *sabbagh@khayam.ut.ac.ir*
(دریافت: ۸۶/۴/۴ ؛ پذیرش:۸۶/۱۰/۶)

چکیده

در این مقاله ابتدا زیرمجموعه های به هم آمیخته از اعداد حقیقی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم اگر دو زیر مجموعه مجزای A و B از اعداد حقیقی دارای مرز مشترک باشند ، در این صورت A و B به هم آمیخته هستند اگریا A و B شامل بازه های غیر تهی نباشند، یا اگر شامل بازه های غیر تهی باشند، نقاط انتهائی بازه ها را نیز در بر گیرند. در ادامه با ارائه تعریفی جدید تحت عنوان مجموعه های به هم آمیخته نوع دوم، نشان می‌دهیم که اگر A و B به هم آمیخته باشند آنگاه A^c و B^c یا به هم آمیخته اند و یا به هم آمیخته نوع دوم. در بخش بعد نشان می‌دهیم اگر f یک تابع 2^∞ روی $I=[0,1]$ باشد که دارای تنها یک مجموعه ω- حدی است، آنگاه این مجموعه ω- حدی یک مجموعه کانتور است. در ادامه شرطی را که تحت آن مجموعه $\{x\in I: card\omega(x,f)<\aleph_0\}$ در I چگال باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: مجموعه های به هم آمیخته، توابع 2^∞، مجموعه های ω -حدی.

مقدمه

بنا به لم ۳-۵ از(Bruckner & Ceder 1992) اگر دو زیر مجموعه غیر تهی و مجزای A و B از اعداد حقیقی به هم آمیخته باشند آنگاه A و B دارای مرز یکسان و کامل هستند. نشان می‌دهیم عکس این مطلب نیز تحت شرایطی برقرار است. یعنی اگر دو زیر مجموعه غیر تهی و مجزای A و B دارای مرزمشترک و کامل باشند، در این صورت A و B بهم آمیخته هستند اگر یا A و B شامل بازه‌های غیر تهی نباشند، یا اگر A و B شامل بازه‌های غیرتهی باشند نقاط انتهایی بازه ها را نیز در برگیرند.

تابع f روی $I=[0,1]$ دارای آنتروپی توپولوژی صفر است اگر و تنها اگر f یک تابع 2^n ویا یک تابع 2^∞ باشد (Ruette 2003). اگر f یک تابع با آنتروپی توپولوژی صفر باشد درباره چگال بودن مجموعه $A=\{x\in I: card\omega(x,f)<\aleph_0\}$ در I چه می‌توان گفت؟ واضح است که اگر f یک تابع 2^n باشد مجموعه A در I چگال است. خواهیم دید اگر f یک تابع 2^∞ و دارای تنها یک مجموعه ω- حدی نامتناهی مانند Ω باشد، آنگاه Ω یک مجموعه کانتور است. برای چنین تابعی، شرط چگال بودن A در I را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بخش اول را به تعاریف و مقدمات به ویژه تعریف سیستمهای ساده اختصاص داده‌ایم. در بخش دوم مطالبی درباره مجموعه های به هم آمیخته بیان می‌کنیم. در بخش سوم توابع 2^∞ روی I که دارای تنها یک مجموعه ω- حدی نامتناهی هستند را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱. سیستمهای ساده اسمیتال

در این بخش به تعاریف ومقدمات مورد نیاز می‌پردازیم.

تعریف ۱. ۱. زیر مجموعه ناتهی C از I را یک مجموعه کانتور گوییم هرگاه هیچ جا چگال و کامل باشد.

تعریف ۱. ۲. دو زیر مجموعه غیرتهی و مجزای A و B از مجموعه اعداد حقیقی را به هم آمیخته نوع اول یا بطور خلاصه به هم آمیخته گوییم هرگاه بین هر نقطه از A و هر نقطه ای که در A نیست نقاطی از هر دو مجموعه A و B موجود باشند.

دو زیرمجموعه $A=(-\infty,-1]\cup\{(-1,1)\cap Q\}$ و $B=\{(-1,1)\cap Q^c\}\cup[1,\infty)$ به هم آمیخته هستند.

تعریف ۱. ۳. زیرمجموعه A از اعداد حقیقی را در خود چگال گوییم هرگاه A شامل نقطه تنها نباشد. اگر علاوه بر این A بسته

هم باشد، آنگاه A یک مجموعه کامل است. همچنین مجموعه D از اعداد حقیقی را در خود چگال دوطرفه گوییم هرگاه هر بازه بسته شامل یک عنصر D، تعداد نامتناهی از عناصر D را دربرداشته باشد.

بازه $(0,1)$ یک مجموعه در خود چگال و همچنین در خود چگال دو طرفه است .هر مجموعه کانتور یک مجموعه در خود چگال می‌باشد ولی مجموعه در خود چگال دو طرفه نیست.

تعریف۱. ۴. تابع f روی I را یک تابع 2^n گوییم هرگاه f تنها عناصر دوری از مرتبه 2^k $(1 \le k \le n)$ داشته باشد (عنصر دوری از مرتبه $r \ge 1$ دارد هر گاه عنصر $x \in I$ موجود باشد بطوری که $f^r(x) = x$ و r کوچکترین عدد صحیح با این خاصیت باشد. r را دوره تناوب x گویند). به همین ترتیب تابع $f : I \to I$ را یک تابع 2^∞ گوییم هرگاه f تنها عناصر دوری از مرتبه 2^k $(k \ge 1)$داشته باشد.

تابع $f : I \to I$ با ضابطه
$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ x - \frac{1}{2} & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$
یک تابع 2^1 می‌باشد. برای ملاحظه تابع 2^∞ به مثال ۵-۵-۱ از(Ruette 2003) مراجعه فرمایید.

تعریف ۱. ۵. فرض کنید $f : I \to I$ یک تابع پیوسته باشد و $x \in I$. مجموعه ω- حدی x تحت f عبارت است از نقاط حدی مجموعه $\{f^n(x) : n \in Z^+\}$. این مجموعه را با $\omega(x, f)$نمایش می‌دهیم.

تعریف۱.۶. فرض کنید $f : I \to I$ یک تابع و J یک زیر مجموعه ناتهی از I باشد. مجموعه $orb(J) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(J)$ را مدار J می‌نامیم. اگر J دوری از مرتبه n باشد مدار آن عبارت است از $orb(J) = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(J)$.

تعریف۱. ۷. تابع $f : I \to I$ را از رده بئر ۱ گوییم هرگاه حد نقطه به نقطه دنباله ای از توابع پیوسته باشد. هر تابع از رده بئر ۱ روی یک مجموعه چگال G_δ یک تابع پیوسته است. (برای اثبات به (شعبانی ۱۳۸۵) مراجعه شود).

تعریف ۱. ۸. فرض کنید (X,d) یک فضای متری کراندار و Λ مجموعه همه زیرمجموعه‌های بسته X باشد. تابع $H : \Lambda \times \Lambda \to [0,\infty]$ با ضابطه $H(A,B) = \inf\{r : A \subset N_r(B), B \subset N_r(A)\}$ یک متر روی Λ تعریف می‌کند که متر هاسدورف نامیده می‌شود.

فرض کنید Γ مجموعه همه دنباله‌های صفر و یک باشد. اعضای Γ را با α نمایش می‌دهیم. درواقع $\alpha = \{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ که برای هر j، α_j یا صفر است یا یک. قرارمی‌دهیم $\alpha | k = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$، $\alpha | k0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0)$ و $\alpha | k1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 1)$. اگربرای هر j، $\alpha_j = 0$ آنگاه α را با $\underline{0}$ و اگر برای هر j، $\alpha_j = 1$ آنگاه α را با $\underline{1}$ نمایش می‌دهیم. تابع $S : \Gamma \to \Gamma$ را با ضابطه $S(\alpha) = \alpha + 1\underline{0}$ تعریف می‌کنیم. در واقع این تابع عمل جمع به هنگ دو ازطرف چپ به طرف راست می‌باشد. برای مثال $S(1,1,1,0,1,0,\ldots) = (0,0,0,1,1,0,\ldots)$ و $S(\underline{1}) = \underline{0}$ و $S(\underline{1}) = \underline{0}$.

تابع S دارای این خاصیت می‌باشد که برای هر $\alpha, \beta \in \Gamma$ و $k \in \mathrm{N}$، عنصر $j \in \mathrm{N}$ وجود دارد که $S^j(\alpha | k) = \beta | k$ (این مطلب با توجه به ساده بودن تابع S نتیجه می‌شود (Bruckner & Smital 1993)).

در اینجا قضیه ۳- ۵ از (Smital 1986) را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱. ۹. فرض کنید $f : I \to I$ یک تابع 2^∞ و Ω یک مجموعه ω- حدی نامتناهی f باشد. دراین صورت دنباله ای از بازه های بسته مانند $\{\ell_k\}_{k=1}^{\infty}$ وجود دارد به گونه‌ای که:

الف) $f^{2^k}(\ell_k) = \ell_k$.

ب) $\ell_{k+1} \bigcup f^{2^k}(\ell_{k+1}) \subset \ell_k$.

ج) برای هر k، $\Omega \subset orb(\ell_k)$.

د) برای هر i و برای هر k، $\Omega \bigcap f^i(\ell_k) \neq \phi$.

تعریف ۱. ۱۰. فرض کنید Ω یک مجموعه ω- حدی نامتناهی برای تابع 2^∞، f باشد. مجموعه همه $f^i(\ell_k)$ های در قضیه ۱-۹ را یک سیستم ساده اسمیتال برای Ω نسبت به f نامیده وآن را با Ψ نمایش می‌دهیم. برای هر $i,k \in \mathrm{N}$ قرار می‌دهیم $J_{\underline{1}|k} = \ell_k$ و $J_{A^i(\underline{1})|k} = f^i(\ell_k)$. بدین ترتیب همه $J_{\alpha|k}$ ها بر سیستم ساده اسمیتال Ψ منطبق می‌باشند. دنباله $\{J_{\alpha|k}\}_{k=1}^{\infty}$ با توجه به قضیه ۹.۱یک دنباله نزولی است.

حال بندهای قضیه ۹.۱را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم (برای دیدن جزییات بیشتر به (شعبانی ۱۳۸۵) مراجعه کنید).

الف) برای هر $\alpha \in \Gamma$ و $k \in \mathrm{N}$، بازه های

$\alpha|k0=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0)$ و $\alpha|k1=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,1)$ زیر بازه‌های بسته و مجزا از $J_{\alpha|k}$ هستند که تابع f^{2^k} آنها را بهم تبدیل می‌کند.

ب) برای هر $\alpha\in\Gamma$، تابع f مجموعه $\{J_{\alpha|k}:\alpha\in\Gamma\}$ را به روی خودش می‌نگارد.

ج) برای هر $\alpha\in\Gamma$ داریم $\Omega\subset\bigcup_{\alpha\in\Gamma}J_{\alpha|k}$.

د) برای هر $\alpha\in\Gamma$ و $k\in\mathrm{N}$، مجموعه $\Omega\bigcap J_{\alpha|k}$ ناتهی است.

نماد گذاری۱. ۱۱:

الف) قرار می‌دهیم $\mathrm{K}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{\alpha\in\Gamma}J_{\alpha|k}$ و $J_\alpha=\bigcap_{k=1}^{\infty}J_{\alpha|k}$.

ب) فرض کنید W مجموعه همه x هایی باشد بطوریکه برای یک J_α داشته باشیم $J_\alpha=\{x\}$، قرار می‌دهیم $C=\overline{W}$.

۲. مجموعه های به هم آمیخته

لم زیر از (Bruckner & Ceder 1992) آورده شده است.

لم ۲. ۱. فرض کنید A و B دو زیر مجموعه به هم آمیخته از اعداد حقیقی باشند آنگاه :

الف) A و B دارای مرز مشترکی مانند P هستند و P یک مجموعه کامل است.

ب) مجموعه های $A\bigcap P$ و $B\bigcap P$ در P چگال هستند.

ج) مجموعه های A و B، مجموعه های در خود چگال هستند و اگر A و B را زیر مجموعه هایی از بازه $(\inf A\bigcup B,\sup A\bigcup B)$ در نظر بگیریم، آنگاه A و B در خود چگال دو طرفه هستند.

حال سؤالی که می‌توان مطرح کرد این است که اگر دو مجموعه غیر تهی و مجزای A و B دارای مرز مشترک و کامل باشند آیا A و B به هم آمیخته هستند؟ مثال زیر نشان می‌دهد که حتی اگر A و B علاوه بر آنکه در بند الف لم قبل صدق کنند، در بندهای ب و ج هم صدق کنند باز هم لزوما دو مجموعه به هم آمیخته نیستند.

گیریم $A=(-\infty,0)\bigcup[(0,1)\bigcap Q]$ و $B=(0,1)\bigcap Q^C$. در این صورت $P=\partial A=\partial B=[0,1]$. از طرفی مجموعه‌های $A\bigcap P$ و $B\bigcap P$ در P چگال هستند. همچنین A و B در خود چگال و در خود چگال دو طرفه نیز می‌باشند. با این حال A و B به هم آمیخته نیستند. زیرا اگر $a\in A$ و $a<0$ آنگاه بین a و صفرعناصری از B وجود ندارند. در قضیه زیر شرط به هم آمیخته بودن دو مجموعه A و B را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲. ۲. فرض کنید A و B دو زیر مجموعه مجزا و غیر تهی از اعداد حقیقی دارای مرز مشترک و کامل P باشند. در این صورت A و B بهم آمیخته هستند اگر یا A و B شامل بازه های غیر تهی نباشند، یا اگر شامل بازه های غیر تهی باشند نقاط انتهائی بازه ها را نیز در بر گیرند.

اثبات : فرض کنید $b\in B$ و $x\notin B$. فرض کنید $b<x$ (اثبات در حالت $x<b$ مشابه است) . اگر $b\in P$ در این صورت قطعا نقطه ای مانند $p\in P$ وجود دارد که $b<p<x$ زیرا در غیر این صورت برای هر a با شرط $b<a<x$ ، خواهیم داشت $a\in B$ ؛ یعنی $[b,x)\subset B$ (اگر A و B شامل هیچ بازه ای نباشند در این صورت همین جا به تناقض رسیده ایم)، پس طبق فرض قضیه $x\in B$، که این یک تناقض است. بنابراین در هر صورت $p\in P$ وجود دارد که $b<p<x$. سه حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: $p\in A$. فرض کنید U یک همسایگی حول p به شعاع $r=\inf\left\{\frac{p-b}{2},\frac{x-p}{2}\right\}$ باشد. بنابراین برای هر $u\in U$ ، $b<u<x$. چون p یک نقطه ای مرزی B است پس U شامل نقاطی از B می‌باشد. از طرفی چون $p\in A$ و $b<p<x$ بنابراین بین هر نقطه از B و هر نقطه ای که از B نباشد نقاطی از A و B وجود دارند ، پس در این حالت A و B به هم آمیخته هستند.

حالت دوم: $p\in B$. چون p یک نقطه مرزی A نیز می‌باشد، لذا هر همسایگی حول p و به ویژه همسایگی U که در حالت اول آمده است شامل نقاطی از A می‌باشد همچنین چون $p\in B$ و $b<p<x$ ، لذا در این حالت نیز بین هر نقطه از B و هر نقطه که به B متعلق نباشد، نقاطی هم از A و هم از B وجود دارند، لذا A و B به هم آمیخته هستند.

حالت سوم: $p\notin A$ و $p\notin B$. همسایگی U که در حالت اول آمده شامل نقاطی از A و B است و چون برای هر $u\in U$ ، $b<u<x$ ، لذا بین نقطه b و نقطه x نقاطی از A و B وجود دارند و چون b و x دلخواه بودند بنابراین A و B به هم آمیخته هستند.

نتیجه۲. ۳. دو مجموعه مجزا و غیر تهی A و B به هم آمیخته هستند اگر و فقط اگر A و B دارای مرز مشترک و کامل باشند، و یا A و B شامل بازه های غیر تهی نباشند، یا اگر A و B شامل بازه هایی باشند، آنگاه نقاط انتهایی بازه ها را نیز شامل باشند.

اثبات : فرض کنید A و B به هم آمیخته باشند. طبق بند الف از لم ۲-۱، A و B دارای مرز مشترک و کامل هستند. فرض کنید

A شامل بازه J باشد و مثلا نقطه انتهایی چپ بازه J به A متعلق نباشد. همچنین فرض کنیم $a \in J$. واضح است که بین a و نقطه انتهایی چپ بازه J عضوی از B وجود ندارد، لذا A و B به هم آمیخته نخواهند بود. پس نقطه انتهایی J به A متعلق است. عکس قضیه همان قضیه ۲. ۲ می‌باشد.

فرض کنید A و B دو مجموعه به هم آمیخته باشند. در حالت کلی A^c و B^c به هم آمیخته نیستند، مثلا فرض کنید $A=(0,1)\cap Q$ و $B=(0,1)\cap Q^c$، واضح است که A و B به هم آمیخته هستند ولی A^c و B^c مجزا نیستند. لذا بنا به تعریف ۱. ۲، A^c و B^c به هم آمیخته نیستند.

تعریف ۲. ۴. دو زیر مجموعه A و B را به هم آمیخته نوع دوم نامیم هر گاه دارای اشتراک ناتهی باشند و دو مجموعه $A-B$ و $B-A$ به هم آمیخته باشند.

برای مثال $A=(-\infty,0]\cup[(0,1)\cap Q]\cup[1,\infty)$ و $B=(-\infty,0]\cup[(0,1)\cap Q^c]\cup[1,\infty)$ دو زیرمجموعه به هم آمیخته نوع دوم هستند.

قضیه۲. ۵. فرض کنید A و B دو مجموعه به هم آمیخته با مرز P باشند. در این صورت A^c و B^c یا دو مجموعه به هم آمیخته هستند ، یا دو مجموعه به هم آمیخته نوع دوم. بعلاوه $\partial B^c=\partial A^c=P$.

اثبات : اگر $A\cup B=R$، آنگاه چون $B=A^c$ و $A=B^c$ لذا چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. فرض کنید $A\cup B\neq R$. در این صورت دومجموعه A^c و B^c دارای اشتراک ناتهی هستند. در واقع $A^c\cap B^c=R-(A\cup B)\neq\phi$. چون $A\cap B=\phi$ لذا $B\subset A^c$ بنابراین $A^c-B^c=A^c\cap B=B$ به همین ترتیب $B^c-A^c=A$. چون A و B به هم آمیخته هستند لذا A^c و B^c به هم آمیخته نوع دوم هستند. تساوی $\partial B^c=\partial A^c=P$ واضح است.

۳. تابع 2^∞ با مجموعه ω- حدی یکتا

فرض کنید Λ مجموعه همه زیرمجموعه های فشرده I باشد. Λ را به متری هاسدورف مجهز می‌کنیم. نگاشت مجموعه مقدار $\omega_f : I\to\Lambda$ را به صورت $\omega_f(x)=\omega(x,f)$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۳. ۱. فرض کنید f یک تابع 2^∞ روی I باشد که تنها یک مجموعه ω- حدی نامتناهی مانند Ω دارد. در این صورت Ω یک مجموعه کانتور است. بعلاوه ω_f از رده بئر ۱ می‌باشد.

اثبات: فرض کنید Ψ سیستم ساده اسمیتال برای Ω نسبت به f باشد. طبق بند ۷ قضیه ۳-۱ از(Bruckner & Ceder 1992)، برای هر $x\in K$ داریم $\omega(x,f)=C$ (برای تعریف K و C به نماد گذاری ۱- ۱۱ مراجعه شود). چون تنها مجموعه ω- حدی f مجموعه Ω می‌باشد، لذا $\Omega=C$. حال نشان می‌دهیم C یک مجموعه کانتور است. با توجه به قضیه ۳- ۱ از(Bruckner & Ceder 1992)، C ناتهی و هیچ جا چگال است. چون $C=\overline{S}$، لذا C بسته می‌باشد. فرض کنید $x\in C$ و J یک فاصله دلخواه شامل x باشد. همچنین فرض کنید $J_{\alpha|m}$ آن بازه ای باشد که x را دربر دارد. $k>m$ را آنقدر بزرگ می‌گیریم که $J_{\alpha|k}\subset J$. فرض کنید x_n نقطه انتهایی $J_{\alpha|k}$ باشد به طوریکه $x_n\neq x$. از نحوه ساختن C معلوم می‌شود که $x_n\in C$، لذا x نقطه حدی C است. در نتیجه C نقطه تنها ندارد. بنابراین C یک مجموعه کانتور است. حال چون تنها مجموعه ω- حدی نامتناهی تابع f یک مجموعه کامل می‌باشد، لذا با توجه به قضیه ۳- ۸ از(Bruckner & Ceder 1992) نگاشت ω_f از رده بئر ۱ است.

قضیه ۳. ۲. فرض کنید f یک تابع 2^∞ روی I باشد که تنها یک مجموعه ω- حدی نامتناهی مانند Ω دارد. فرض کنید Ψ سیستم ساده اسمیتال برای Ω نسبت به f و $K=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{\alpha\in\Gamma}J_{\alpha|k}$ مجموعه معرفی شده در نماد گذاری ۱-۱۱ باشد. اگر درون K تهی باشد، آنگاه مجموعه $A=\{x\in I: card\,\omega(x,f)<\aleph_0\}$ در I چگال است.

اثبات : چون طبق فرض تابع f تنها یک مجموعه ω- حدی نامتناهی مانند Ω دارد، لذا با توجه به قضیه قبل داریم $\Omega=C$. مجموعه های $A=\{x\in I: card\,\omega(x,f)<\aleph_0\}$ و $B=\{x\in I:\omega(x,f)=C\}$ را در نظر می‌گیریم. طبق بند ۷ از قضیه ۳-۱ از (Bruckner & Ceder 1992) برای هر $x\in K$ داریم $\omega(x,f)=C$. با توجه به این مطلب و همچنین تعریف مجموعه B چون درون K تهی است، مجموعه B دارای نقطه درونی نخواهد بود . واضح است که $A\cup B\subseteq I$. حال فرض کنیم $x\in I$، در این صورت یا مجموعه ω- حدی x تحت f نامتناهی است که خواهیم داشت $\omega(x,f)=C$ و در نتیجه x به B متعلق است و یا مجموعه ω- حدی x تحت f متناهی است که در این صورت x به A تعلق دارد. بنابراین $I\subseteq A\cup B$ و در نتیجه $I=A\cup B$. همچنین A و B دارای اشتراک تهی هستند. حال فرض کنیم G یک مجموعه باز دلخواه باشد. چون

درون B تهی است، لذا $A \cap G \neq \phi$ و در نتیجه A در I چگال است.

یادداشت:

۱. در قضیه A از (Federenko *et al.* 1990) آمده که آنتروپی توپولوژی تابع f مساوی صفر است اگر وتنها اگرمجموعه نقاط دوری f یک مجموعه G_δ باشد. آیا می‌توان گفت که مجموعه A در قضیه ۳. ۲ نیز یک مجموعه G_δ است؟ توجه کنید که ممکن است مجموعه A در قضیه ۳. ۲ تنها شامل نقاط دوری نباشد بلکه نقاط عاقبت دوری نیزداشته باشد.

۲. در قضیه ۳. ۲ اگربخواهیم مجموعه A را با استفاده از اندازه احتمال اندازه گیری کنیم در صورت تهی بودن درون K، مجموعه A دارای اندازه یک می‌باشد.

منابع:

شعبانی س. ۱۳۸۵: آشوب نسبت به نگاشت. پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی. دانشگاه تهران.

Bruckner A.M., Ceder J. 1992: Chaos in terms of the map x→ω(x,f). *Pacific. J. Math.* **159:** 63-96.

Bruckner A.M., & Smital J. 1993: A characterization of w-limit sets for continuous maps of the interval with zero topological entropy, Ergodic Theory Dynamical Systems 13, 7- 19.

Federenko V.V., Sharkovskii A.N., Smital J. 1990: Characterization of weakly chaotic maps of the interval, proc. *Amer. Math. Soc.* **100:** 141-148.

Ruette S. 2003: Chaos for continuous Interval maps. University Paris-Sud 91405 Orsay, Cedex-France.

Smital J. 1986:Chaotic functions with zero topological entropy. *Trans. Amer. Soc.* **297:** 269-282.