

مدل بیزی سلسله مراتبی برای جدول‌های پیشابندی 2×2

مجتبی گنجعلی*، زهرا صابری

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

* مسئول مکاتبات - آدرس الکترونیکی: m-ganjali@sbu.ac.ir

(دریافت: ۸۶/۹/۱۳؛ پذیرش: ۸۶/۱۰/۷)

چکیده

یک مدل بیزی سلسله مراتبی برای تحلیل جدول‌های پیشابندی 2×2 معرفی و با استفاده از آن به استنباط در باره پارامتر همبستگی، لگاریتم نسبت بخت، پرداخته شده است. برای استخراج نمونه تصادفی از توزیع پسینی لگاریتم نسبت بخت از روش محاسباتی نمونه‌گیر گیبس استفاده شده است. برای آزمون استقلال چگونگی استفاده از مدل بیزی سلسله مراتبی در محاسبه عامل بیزی نیز معرفی و در یک مثال کاربردی به کار برده شده است.

واژه‌های کلیدی: توزیع فوق هندسی نامرکزی، آزمون فیشر، بیزی سلسله مراتبی، عامل بیزی، نمونه‌گیری پذیرش-رد.

۱. مقدمه

آزمون فرض در دیدگاه کلاسیک، زمانی که اندازه نمونه بزرگ باشد دارای توان بالایی است. اما در عمل مواردی پیش می‌آید که اندازه نمونه بسیار کوچک است، در این صورت روشهای کلاسیک محافظه کارانه عمل می‌کنند. مثالهای زیادی وجود دارند که در آنها آزمایشگر گواهی شهودی بر رد فرض صفر دارد، اما مقادیری برای آماره آزمون با استفاده از روش کلاسیک بدست می‌آید که با توجه به آنها نمی‌توان گفت: "گواه قوی یا حتی گواهی بر رد فرض صفر وجود دارد" (دو مثال در این خصوص عبارتند از: آزمون دقیق فیشر (Fisher 1934) و آزمون مجموع رتبه‌ای ویلکاکسون (Wilcoxon 1945). در انجام استنباط در جدول‌های پیشابندی 2×2 از دیدگاه کلاسیک، دو روش شرطی و ناشروطی وجود دارند. در شیوه‌ی ناشروطی معمول‌ترین مدل نمونه‌گیری، نمونه‌گیری دوجمله‌ای مستقل در دو سطر است. فرض همگنی بیان می‌کند که احتمال موفقیت در سطر ۱ برابر احتمال موفقیت در سطر ۲ است. در شیوه شرطی پارامترهای مزاحم با شرطی کردن نسبت به آماره‌های بسنده‌اشان حذف می‌شوند. برای مثال، برای نمونه‌گیری چندجمله‌ای یا پواسون، شرطی کردن نسبت به مجموع‌های سطری نمونه‌گیری دو جمله‌ای را نتیجه می‌دهد که در آن استقلال آماری هم ارز همگنی است. تحت استقلال، شرطی کردن روی مجموع‌های ستونی، موجب حذف پارامتر مزاحم و منجر به استفاده از توزیع فوق هندسی می‌شود (این روش در آزمون دقیق فیشر استفاده می‌شود). بحث در باره شیوه‌های شرطی و ناشروطی بسیار گسترده بوده است. نویسندگانی که این مسئله را مورد بررسی قرار داده اند عبارتند از: Upton 1982 Upton 1982; Yates 1984; Haber 1986; Overall et)

al., 1987; Rice 1988; Lloyd 1988; D'Agostino et al., 1988; Barnard 1989; Little 1989; Camilli 1990; Richardson 1990; Storer & Kim 1990; Cormack & Mantel 1991; Upton 1992; (Routledge 1992; Reid 1995; Martin & Tejedor 1995

مساله به خصوص را در این تحقیق بررسی نمی‌کنیم.

برخی استراتژی‌ها در مواجهه با نمونه‌های با اندازه کوچک همچون افزایش اندازه نمونه، اعمال فرض‌های اضافی، استفاده از mid-P- مقدار به جای P- مقدار و استفاده از آزمون‌های تصادفی در رضایی و گنجعلی (۱۳۸۱) با ارائه مثال‌هایی بررسی شده‌اند. به هرحال استفاده از رهیافت بیزی نیز یکی از استراتژی‌های خوب است که در جدول 2×2 می‌تواند به دو روش متفاوت شرطی و ناشروطی استفاده شود. در روش ناشروطی، با نمونه‌گیری دو جمله‌ای مستقل در دو سطر شروع و سپس یک چگالی پیشینی مشترک برای احتمالات موفقیت در دو سطر انتخاب می‌شود. سپس، توزیع پسینی مشترک (یا تبدیلی از آن) را یافته و با انتگرال‌گیری از پارامتر مزاحم از آن به چگالی پسینی حاشیه‌ای پارامتر مورد علاقه دست می‌یابیم، برای مثال (Hashemi et al., 1997)، فصل ۲، جانسون و آلبرت (Johnson & Albert 1999) را برای آزمون همگنی و اگوستی و مین (Agresti & Min 2005) را برای بازه‌های اطمینان بیزی اختلاف نسبتها ببینید). برای جدول‌های 2×2 ، با استفاده از شیوه ناشروطی و توزیع‌های پیشینی معین، روش بیزی نتایجی هم ارز آزمون‌های شرطی نتیجه می‌دهد. برای مثال التهم (Altham 1969) یک تحلیل بیزی برای مقایسه پارامترها در نمونه‌های دو جمله‌ای مستقل و وابسته ارائه داده است. برای مثال‌های دیگر از تحلیل‌های بیزی در جدول‌های 2×2 لئونارد (Leonard 1975)، چن و نوویک (Chen & Novick 1984)، نورمینن و موتانن (Nurminen &

وابسته باشند. اگر ابرپارامترها نامعلوم باشند، یک روش حل مسئله برآورد ابرپارامترها با استفاده از داده‌های مشاهده شده x_1, \dots, x_n است. روش دیگر رهیافت بیزی سلسله مراتبی است، که در آن برای ابرپارامترها نیز توزیع پیشینی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین اگر بردار x مشاهده‌ای از توزیع $f(x|\theta)$ باشد که در آن به برآورد θ علاقه‌مندیم، می‌توان گفت در مدل بیز سلسله مراتبی داریم:

$$\begin{aligned} X|\theta &\sim f(x|\theta), \\ \Theta|\gamma &\sim \pi(\theta|\gamma), \\ \Gamma &\sim \psi(\gamma) \end{aligned} \quad (1)$$

که فرض می‌کنیم $\psi(\cdot)$ تابعی معلوم است که به هیچ پارامتر نامعلومی وابسته نیست. توجه کنید که می‌توان این قاعده سلسله مراتبی را تا چند مرحله ادامه داد. به هر حال در عمل اغلب به استفاده از مدل (۱) اکتفا می‌شود. با این توضیحات می‌توان گفت توزیع حاشیه ای θ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi(\theta) = \int \pi(\theta|\gamma)\psi(\gamma)d\gamma$$

که مدل سلسله مراتبی (۱) را به مدلی با تک پیشین تبدیل می‌کند.

۲.۲ عامل بیزی

فرض کنید می‌خواهیم فرض $H_0: \theta \in \Theta_0$ در مقابل $H_1: \theta \in \Theta_1$ را آزمون کنیم. مسئله را از دیدگاه بیزی در نظر بگیرید. یکی از روشهای انجام این آزمون و اتخاذ تصمیم این است که برای بردار مشاهده شده x نسبت احتمالهای پسینی، $\frac{P\{\Theta_0|x\}}{P\{\Theta_1|x\}}$ را به دست آوریم و با توجه به مقدار این کمیت تصمیم به رد یا پذیرش فرض صفر گیریم (واضح است که اگر این نسبت مقداری بزرگتر از ۱ را اختیار کند در این صورت فرض صفر را می‌پذیریم). اما معیار دیگری که به کمک آن می‌توان تصمیم به رد یا پذیرش فرض صفر گرفت استفاده از عامل بیزی است که همان نسبت احتمالهای پسینی فرض صفر به فرض مقابل به احتمالهای پیشینی فرض صفر به مقابل است. به عبارتی:

$$B_{01}^{\pi}(x) = \frac{P\{\Theta_0|x\}}{P\{\Theta_1|x\}} \div \frac{\pi(\theta \in \Theta_0)}{\pi(\theta \in \Theta_1)}$$

در واقع این نسبت میزان اصلاح در نسبت احتمالهای Θ_0 در مقابل Θ_1 است وقتی که $X = x$ را مشاهده کرده‌ایم. قابل توجه است در حالتی که $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ و $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ ، عامل بیزی، در واقع همان نسبت توابع درست‌نمایی است یعنی:

$$B_{01}^{\pi}(x) = \frac{f(x|\theta_0)}{f(x|\theta_1)}$$

در حالت کلی، عامل بیزی به اطلاعات پیشینی وابسته است، اگر فرض کنیم که π_0 توزیع پیشینی θ تحت فرض صفر و π_1 توزیع

(Mutanen 1987) و هوارد (Howard 1998) را ببینید.

گنجعلی و بریج (Ganjali & Berridge 2007a) شیوه بیزی را بعد از شرطی کردن روی همه‌ی مجموع‌های سطری و ستونی استفاده کردند. به این معنی که طرح آزمایش آنها مانند طرح آزمایشی فیشر در مثال معروف او (Fisher 1935a, 11-25) بوده است. آنها توزیع شرطی آماره آزمون تحت فرض مقابل را بازپارامتریده کرده و با انتخاب توزیع پیشینی تجربی از الگوریتم پذیرش-رد برای شبیه‌سازی توزیع پسینی استفاده و از عامل بیزی به عنوان خلاصه‌ای از گواه بر رد فرض صفر (استقلال دو متغیر) استفاده کرده‌اند. آنها در انتخاب بین توزیع‌های پیشینی ممکن دیگر نیز در گنجعلی و بریج (Ganjali & Berridge 2007b) بحث کرده‌اند. بهر حال همان طور که در این مقالات بحث شده است استفاده از توزیع پیشینی آگاهی بخش ممکن است از حساسیت زیادی برخوردار باشد. بنابراین مدل بیزی، حتی از مراتب بالاتر، که بتواند از توزیع‌های پیشینی ناآگاهی بخش استفاده کند می‌تواند در مدل‌بندی بهتر جدول‌های پیش‌بینی 2×2 کمک کند. در این مقاله برای انجام استنباط در این جدولها از مدل بیزی سلسله مراتبی بهره می‌بریم. هدفی که در اینجا دنبال می‌کنیم یافتن پاسخ این پرسش است که آیا در این جدولها استقلال وجود دارد یا خیر. به عبارتی دیگر می‌خواهیم آزمون $H_0: \delta = 0$ در مقابل $H_1: \delta \neq 0$ را انجام دهیم که در آن δ لگاریتم نسبت بخت است. برای نیل به این هدف و اخذ تصمیم برای این آزمون از روش مدرن نمونه‌گیر گیبس، که در آن به استفاده از نمونه گیر رد-قبول نیاز است، استفاده خواهیم کرد. سپس راهی برای استفاده از مدل بیزی سلسله مراتبی در محاسبه عامل بیزی معرفی و آن را در یک مثال کاربردی توضیح می‌دهیم.

مقاله به این صورت سازماندهی شده است که ابتدا در بخش ۲ به شرح مختصری از مدل بیزی سلسله مراتبی و عامل بیزی خواهیم پرداخت. در بخش ۳ و ۴ رهیافت بیزی سلسله مراتبی در آزمون دقیق جدول‌های 2×2 را معرفی و در بخش ۵ از آن در یک مثال کاربردی استفاده می‌کنیم. در بخش ۶ به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

۲- روش بیزی سلسله مراتبی و عامل بیزی

در این بخش ابتدا مدل بیز سلسله مراتبی را مرور و سپس عامل بیز برای استفاده در آزمون فرض را یادآوری می‌کنیم. برای مطالب بیشتر در مورد این موضوعات به فصل‌های ۱ و ۵ رابرت (Robert 2001) و فصل ۴ لی‌من و کسلا (Lehman & Casella 1998) مراجعه کنید.

۲.۱ روش بیزی سلسله مراتبی

رهیافت بیزی در استنباط آماری به انتخاب توزیع پیشینی پارامترها وابسته است که این پیشین‌ها ممکن است خود به ابرپارامترهایی

n_{1+} و n_{2+} مجموع‌های سطری، n_{+1} مجموع ستونی اول و n حجم کل نمونه است.

جدول ۱: جدول پیش‌بینی ۲×۲ با مجموع‌های سطری و ستونی داده شده.

	۱	۲	مجموع
۱	n_{11}	n_{12}	n_{1+}
۲	n_{21}	n_{22}	n_{2+}
مجموع	n_{+1}	n_{+2}	n

اگر N_{11} مقدار بزرگی مشاهده شود فرض استقلال در مقابل همبستگی مثبت در این جدول رد می‌شود، بنابراین در این آزمون p -مقدار عبارت است از $P_{H_0}(N_{11} \geq n_{11})$ که n_{11} مقدار مشاهده شده متغیر N_{11} می‌باشد.

مثال چشیدن چای توسط همکار فیشر را در نظر بگیرید، در مثال مبدا فیشر ۸ فنجان چای را که در ۴ تای آنها اول چای بعد شیر و در ۴ تای دیگر ابتدا شیر و سپس چای ریخته است، به همکارش داده و از او می‌خواهد که حدس بزند که در کدامیک اول چای ریخته شده و در کدام اول شیر ریخته شده است. برای انطباق با هدف توضیحی ما، فرض کنید که فیشر ۴ فنجان چای (که در ۲ تای آنها اول چای بعد شیر و در ۲ تای دیگر ابتدا شیر و سپس چای ریخته شده است) به همکارش می‌دهد. گیریم که همکارش تمام فنجان‌ها را درست حدس زده باشد (یعنی $n_{11} = 2$) در این صورت p -مقدار، برای آزمون فرض استقلال در مقابل همبستگی مثبت، برابر است با $P_{H_0}(N_{11} \geq 2) = \frac{1}{6} = 0.167$ و گواهی بر رد فرض صفر وجود ندارد. توجه کنید که مقدار $n_{11} = 2$ مشاهده بسیار موافق H_1 است (تمام حدسیات همکارش درست بوده است) ولی آزمون معنی‌داری تنها به بیان اینکه "گواه کافی برای رد فرض صفر وجود ندارد" اکتفا می‌کند.

با توجه به مطالب بالا می‌توان گفت که استفاده از رهیافت بیزی یک گزینه بهتر برای این گونه استنباط‌ها می‌باشد. در این صورت توزیع شرطی آماره در حالت کلی عبارتست از:

$$f(n_{11} | n, n_{1+}, n_{+1}; \theta) = \frac{\binom{n_{1+}}{n_{11}} \binom{n_{2+}}{n_{+1} - n_{11}} \theta^{n_{11}}}{\sum_u \binom{n_{1+}}{u} \binom{n_{2+}}{n_{+1} - u} \theta^u}$$

که در آن:

پیشینی θ تحت فرض مقابل باشد، در این صورت:

$$B_{01}^\pi(x) = \frac{\int_{\Theta_0} f(x | \theta_0) \pi_0(\theta) d\theta}{\int_{\Theta_1} f(x | \theta_1) \pi_1(\theta) d\theta}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود نسبت توابع درست‌نمایی به نسبت توزیع‌های حاشیه‌ای تبدیل می‌شود. یک حالت خاص در اینجا، آن است که $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ و $\Theta_1 = \{\theta \neq \theta_0\}$ ، در این صورت داریم:

$$B_{01}^\pi(x) = \frac{f(x | \theta_0)}{\int_{\Theta_1} f(x | \theta_1) \pi_1(\theta) d\theta}$$

حال اگر $\hat{\theta}_0$ برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی θ تحت Θ_0 و $\hat{\theta}_1$ برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی θ تحت Θ_1 باشد، در این صورت نسبت درست‌نمایی عبارتست از:

$$R(x) = \frac{f(x | \hat{\theta}_0)}{f(x | \hat{\theta}_1)} = \frac{\sup_{\Theta_0} f(x | \theta)}{\sup_{\Theta_1} f(x | \theta)}$$

که این خود حالت خاصی از $B_{01}^\pi(x)$ است وقتی که π_0 و π_1 به ترتیب توابع توزیع تباهیده در نقاط $\hat{\theta}_0$ و $\hat{\theta}_1$ باشند.

جفریز (۱۹۶۱)، رابرت (۲۰۰۱)، کس و رفتری (۱۹۹۵) بیان کرده‌اند که مقادیر $B_{01}^\pi(x)$ بین ۰/۱ و ۰/۳۱۶ گواه کمی بر رد H_0 نشان می‌دهند، مقادیر بین ۰/۰۱ و ۰/۱ گواهی قوی بر رد فرض صفرند و مقادیر کمتر از ۰/۰۱ گواهی بسیار قوی بر رد H_0 نشان می‌دهند.

۳. رهیافت بیزی سلسله مراتبی در جدول‌های پیش‌بینی ۲×۲

در این بخش رهیافت بیزی سلسله مراتبی برای آزمون استقلال در جدول پیش‌بینی ۲×۲ ارائه و عامل بیزی را برای آزمون استقلال در این جدول ارائه می‌کنیم (همچنین می‌توان فرض کرد که پارامترهای مزاحم با شرطی کردن نسبت به آماره‌های بسنده‌شان حذف شده‌اند). آزمون استقلال (H_0) را در مقابل وجود پیوند (H_1) در یک جدول ۲×۲ پیش‌بینی همچون جدول ۱ که در آن مجموع‌های حاشیه‌ای سطری و ستونی داده شده است را در نظر بگیرید.

گیریم N_{11} متغیر تصادفی تعداد رخدادها در خانه واقع در سطر اول و ستون اول با مقدار مشاهده شده n_{11} باشد، تحت فرض استقلال N_{11} دارای توزیع فوق هندسی به صورت زیر است:

$$P_{H_0}(N_{11} = n_{11}) = \frac{\binom{n_{1+}}{n_{11}} \binom{n_{2+}}{n_{+1} - n_{11}}}{\binom{n}{n_{+1}}}$$

که در آن n_{11} مقادیری در فاصله $[\max\{0, n_{1+} + n_{+1} - n\}, \min\{n_{+1}, n_{1+}\}]$ اختیار می‌کند و

به سادگی می توان نتیجه گرفت که توزیع های شرطی عبارتند از:

$$\delta | n_{11}, \mu, \sigma^2 \sim \exp\left(-\frac{(\delta - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \times \frac{\exp(n_{11}\delta)}{\sum_{z=l}^u \binom{n_{1+}}{z} \binom{n_{2+}}{n_{+1}-z} \exp(\delta z)} \quad (2)$$

$$\mu | \sigma^2, \delta \sim N(\omega\delta, d^2) \quad (3)$$

که در آن:

$$d^2 = \left[\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\mu^2} \right]^{-1} ; \quad \omega = \sigma_\mu^2 [\sigma_\mu^2 + \sigma^2]^{-1}$$

و در نهایت:

$$\sigma^{-2} | \mu, \delta \sim \text{Gamma}\left(\frac{1+v_0}{2}, \frac{1}{2}[(\delta - \mu)^2 + v_0]\right) \quad (4)$$

در اینجا، با توجه به اینکه توزیع پسینی پارامترهای μ و σ^{-2} ، توزیع های مشخصی است برای تولید نمونه از آنها مشکلی وجود ندارد. تنها مشکلی که در اینجا وجود دارد تولید نمونه از توزیع پسینی لگاریتم نسبت بختها در (۲) می باشد که دارای فرم خاصی نمی باشد. راهکاری که در اینجا از آن استفاده می کنیم روش نمونه گیری پذیرش-رد برای تولید مقادیر تصادفی از توزیع توام (δ, μ, σ^2) است که برای $i = 1, \dots, M$ و با اختیار مقادیر اولیه مناسب برای $\mu^{(0)}$ و $\sigma^{2(0)}$ به ترتیب زیر عمل می کنیم،

۱- برای تولید $\delta^{(i)}$ از (۲) فرض کنیم توزیع پیشینی انتخابی $\delta^{(i)}$ به شرط $\mu^{(i-1)}$ و $\sigma^{2(i-1)}$ یک توزیع پیشینی سره باشد (در اینجا توزیع نرمال در نظر گرفته شده است). یک مقدار مثبت c ، را به گونه ای انتخاب می کنیم که داشته باشیم:

$$f(n_{11} | n, n_{1+}, n_{+1}; \delta^{(i)}) \pi(\delta^{(i)}) < c \pi(\delta^{(i)}),$$

با اختیار $c = 1$ مراحل زیر را برای تولید $\delta^{(i)}$ انجام می دهیم، الف) $\delta^{(i)}$ را از توزیع $N(\mu^{(i-1)}, \sigma^{2(i-1)})$ و u را از توزیع $U(0, 1)$ تولید می کنیم.

ب) اگر $f(n_{11} | n, n_{1+}, n_{+1}; \delta^{(i)}) < u$ ، آنگاه $\delta^{(i)}$ را به عنوان یک نمونه انتخاب کرده به مرحله ۲ در زیر می رویم. در غیر این صورت دوباره از توزیع نرمال نمونه استخراج می کنیم. مراحل الف) و ب) تا انتخاب یک نمونه از $\delta^{(i)}$ ادامه می یابد.

۲. از توزیع پسین μ و σ^{-2} به شرط $\delta^{(i)}$ که به ترتیب در (۳) و (۴) داده شده اند نمونه تصادفی تولید می کنیم و i را یک واحد افزایش می دهیم.

$$\begin{cases} \theta > 0 \\ u = \max\{0, n_{1+} + n_{+1} - n\}, \dots, \min\{n_{1+}, n_{+1}\} \end{cases}$$

و θ نسبت بختها است. این توزیع در واقع یک توزیع فوق هندسی نامرکزی است (Agresti 2002, Fisher 1935b). حال اگر قرار دهیم $\delta = \ln \theta$ ، در این صورت δ لگاریتم نسبت بختها می باشد که وقتی دو متغیر مستقل باشند مقدار صفر را اختیار می کند و در این صورت توزیع به توزیع فوق هندسی مرکزی تبدیل می شود و همچنین تحت فرض صفر مقادیری که اختیار می کند حول صفر متقارن است. این تغییر پارامتر به ما کمک می کند تا بتوانیم توزیع نرمال را به عنوان توزیع پیشین این پارامتر در نظر بگیریم.

برای انجام استنباط بیزی سلسله مراتبی در چنین جداولی، یک مدل سه مرحله ای در نظر می گیریم که مراحل آن به ترتیب عبارتند از: مرحله اول:

$$\Pr\{n_{11} | n_{1+}, n_{+1}, n; \delta\} = \frac{\binom{n_{1+}}{n_{11}} \binom{n_{2+}}{n_{+1}-n_{11}} \exp(\delta n_{11})}{\sum_{z=l}^u \binom{n_{1+}}{z} \binom{n_{2+}}{n_{+1}-z} \exp(\delta z)}$$

که در آن

$$\begin{cases} l = \max(0, n_{+1} - n_{1+}) \\ u = \min(n_{+1}, n_{1+}) \end{cases} ; \delta \in R$$

مرحله دوم:

$$\delta \sim N(\mu, \sigma^2)$$

مرحله سوم:

$$\mu \sim N(0, \sigma_\mu^2) ; \sigma_\mu^2 = 10^3$$

$$\sigma^{-2} \sim \text{Gamma}\left(\frac{V_0}{2}, \frac{V_0}{2}\right) ; V_0 = 10^{-3}$$

که امید و واریانس توزیع گاما به ترتیب 1 و $\frac{10^3}{2}$ می باشد. با

انتخاب این مقادیر که منجر به واریانس های بزرگ برای μ و σ^{-2} می شوند سعی شده است تا از توزیع های پیشین ناآگاهی بخش استفاده شود.

همانطور که ملاحظه می شود، در مرحله اول توزیع شرطی n_{11} تنها به δ یعنی تنها به لگاریتم نسبت بختها وابسته است. در مرحله دوم توزیع لگاریتم نسبت بخت را نرمال در نظر می گیریم. مقادیر در نظر گرفته شده در مرحله سوم برای μ و σ_μ^2 به گونه ای است که ناآگاهی بخش بودن توزیع های پیشینی برای μ و σ^2 را نشان می دهد. انتخاب این توزیع های پیشینی ناآگاهی بخش منجر به توزیع های پسینی با دم های کلفت می شود که به برآوردگرهای بیزی که استوارترند منتهی می شود (Lehman & Casella 1998, chapter 4).

۵. مثال کاربردی

در این بخش شیوه معرفی شده را در یک مثال کاربردی به کار می‌بریم. داده‌های ارائه شده در جدول ۲ توسط اسنبرگ (Essenberg 1952) ارائه شده است. در این آزمایش هدف بررسی تاثیر دود (تنباکو) بر ابتلا به سرطان ریه می‌باشد. بدین منظور ۵۵ موش انتخاب و به طور تصادفی به دو گروه تقسیم شدند، یکی از این گروه‌ها به مدت ۱ سال در معرض دود تنباکو قرار گرفت (در هر ساعت ۱ سیگار) و گروه دیگر به عنوان گروه شاهد در نظر گرفته شد. پس از ۱ سال، تمام موش‌ها کشته شده و ریه‌های آنها توسط یک آسیب شناس برای بررسی وجود تومور معاینه شده‌اند. از ۵۵ موش مورد مطالعه، ۲۳ موش در معرض دود قرار گرفته‌اند که ۲۱ مورد تومور داشته‌اند، همچنین ۳۲ موش شاهد بوده‌اند که از این تعداد ۱۹ مورد از خود تومور نشان داده‌اند. برای داده‌های مشاهده شده علاقمندیم بدانیم آیا ابتلا به سرطان ریه در موشها مستقل از در معرض دود قرار گرفتن آنها است یا خیر. برای پاسخ به این سؤال P-مقدار آزمون دقیق فیشر برابر ۰/۰۱۳ است که گواه قوی بر رد فرض استقلال نشان می‌دهد. برای تحلیل بیزی در شکل ۱ نمودار توزیع پسین δ ، لگاریتم نسبت بخت، آورده شده است.

جدول ۲: وقوع تومور در موش‌های در معرض دود قرار گرفته. منبع

اسنبرگ، ۱۹۵۲.

مجموع	شاهد	در معرض دود	مجموع
۴۰	۱۹	۲۱	موش با تومور
۱۵	۱۳	۲	موش بدون تومور
۵۵	۳۲	۲۳	مجموع

با استفاده از روش مونت کارلو داریم:

$$E(\delta | N_{11} = 21) \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \delta^{(k)} = 2.125$$

که در آن $\delta^{(k)}$ برای $k = 1, \dots, K$ با $K = 5000$ از توزیع پسین δ استخراج شده‌اند. $q_{25} = 1.314$ و $q_{50} = 1.939$ ، $q_{75} = 2.327$ و $P(\delta > 0 | n_{11}) = 0.954$ در آنها q_t صدک مرتبه t است.

برای جدول (۲)، با استفاده از رابطه (۵)، $B_{\delta=0, \delta>0}(n_{11}) = 0.049$ که با توجه به معیار جفریز (۱۹۶۱) تشریح شده در انتهای بخش ۲ می‌توان نتیجه گرفت که گواه قوی بر رد فرض صفر وجود دارد. همانطور که ملاحظه شد آزمون کلاسیک و آزمون بیزی نشان می‌دهند که گواه قوی بر رد فرض صفر وجود دارد و این بدین معناست که وجود دود تاثیر زیادی بر ابتلا به سرطان ریه دارد.

مراحل (۱) و (۲) را تکرار می‌کنیم تا نمونه‌ای با حجم M به دست آید.

۴. عامل بیزی در آزمون استقلال برای جدول ۲×۲

عامل بیزی در آزمون استقلال ($H_0: \delta = 0$) در مقابل ($H_1: \delta > 0$) (وجود همبستگی مثبت) عبارت است از:

$$B_{01} = \frac{f(n_{11} | n, n_{1+}, n_{+1}; \delta = 0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\delta > 0) f(n_{11} | n, n_{1+}, n_{+1}; \delta) \pi(\delta | \delta > 0) d\delta} \quad (5)$$

که در آن $I(\delta > 0)$ تابع نشانگر است [به عبارتی $I(\delta > 0) = 1$ اگر $\delta > 0$ و در غیر این صورت $I(\delta \leq 0) = 0$]. مشکل محاسبه عامل بیزی بالا محاسبه انتگرال مخرج کسر می‌باشد که در اینجا برای حل آن با در نظر گرفتن مدل بیزی سلسله مراتبی از روشهای محاسبات عددی مونت کارلو استفاده می‌نمائیم. از آنجا که:

$$\pi(\delta | \delta > 0) = \frac{\pi(\delta)}{\pi(\delta > 0)}$$

و همچنین:

$$\pi(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \pi(\delta | \mu, \sigma^2) \pi(\mu) \pi(\sigma^2) d\sigma^2 d\mu$$

در نتیجه عامل بیزی عبارت است از:

$$B_{01} = \frac{\pi(\delta > 0) f(n_{11} | n, n_{1+}, n_{+1}; \delta = 0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\delta > 0) f(n_{11} | n, n_{1+}, n_{+1}; \delta) \pi(\delta) d\delta} \quad (6)$$

برای محاسبه (۶) ابتدا نیاز به استخراج نمونه‌های تصادفی از توزیع پیشین δ داریم. برای این کار می‌توان برای $i = 1, \dots, K$ و با اختیار مقادیر مناسب اولیه برای $\mu^{(0)}$ و $\sigma^{(0)}$ از روش زیر استفاده کرد.

ابتدا از توزیع $(\mu^{(i-1)}, \sigma^{2(i-1)}) \sim N(\mu^{(i-1)}, \sigma^{2(i-1)})$ یک نمونه تصادفی تولید می‌کنیم. سپس از توزیع‌های $\sigma_\mu^2 = 10^3$ و $\mu \sim N(0, \sigma_\mu^2)$ ؛

$\sigma^{-2} \sim \text{Gamma}(\frac{V_0}{2}, \frac{V_0}{2})$ ؛ $\frac{V_0}{2} = 10^{-3}$ نمونه تصادفی تولید می‌کنیم و آنها را $\mu^{(i)}$ و $\sigma^{2(i)}$ می‌نامیم. مجدداً این مراحل را با مقادیر جدید

$\mu^{(i)}$ و $\sigma^{2(i)}$ تکرار می‌کنیم تا به حجم K برسیم.

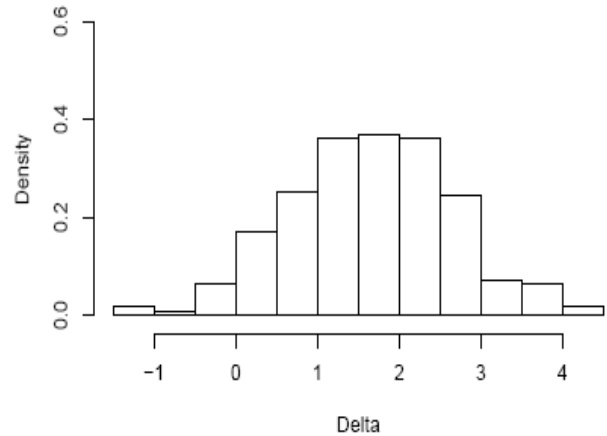
در نهایت به ازای نمونه تولید شده مقادیر متناظر تابع $f(n_{11} | n, n_{1+}, n_{+1}; \delta)$ را محاسبه کرده و از تقریب:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(\delta > 0) f(n_{11} | n, n_{1+}, n_{+1}; \delta) \pi(\delta) d\delta \approx \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K I(\delta^{(i)} > 0) f(n_{11} | n, n_{1+}, n_{+1}; \delta^{(i)})$$

برای محاسبه انتگرال مخرج عامل بیز استفاده می‌کنیم، که در آن $\delta^{(i)}$ ، i امین نمونه استخراج شده و K تعداد استخراج‌های δ است.

۶. نتیجه‌گیری و پیشنهاد

یکی از مشکلاتی که در استنباط آماری کلاسیک، بویژه آزمون فرض، وجود دارد آن است که اگر اندازه نمونه به اندازه کافی بزرگ نباشد، در این صورت ممکن است نتیجه حاصل از استنباط مورد نظر با آنچه بطور شهودی انتظار می‌رود مطابقت نداشته باشد. راهکاری که در این مقاله پیشنهاد شد استفاده از یک مدل بیزی سلسله مراتبی در انجام این گونه استنباطها است. در جدول‌های پیش‌بینی 2×2 با نمونه کوچک با در نظر گرفتن یک مدل بیزی سلسله مراتبی، آزمون استقلال را به روش بیزی با گزارش عامل بیزی به عنوان نتیجه حاصل از آزمون، انجام دادیم.



شکل ۱: نمودار چگالی پسین لگاریتم نسبت بخت (δ).

منابع:

رضایی م.، گنجعلی م. ۱۳۸۱: آزمون فرض و نمونه کوچک. *ندای آماری*، (۱): ۴۲-۴۷.

- Agresti A. 2002: *Categorical Data Analysis*. Wiley.
- Agresti A., Min Y. 2005: Frequentist performance of Bayesian confidence intervals for comparing proportions in 2 2 contingency tables. *Biometric*. **61**: 515-523.
- Altham P. M. E. 1969: Exact Bayesian analysis of a 2 2 contingency table and Fisher's exact significance test. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*. **31**: 261-269.
- Barnard G. A. 1989: On alleged gains in power from lower P values. *Statistics in Medicine*. **8**: 1469-1477.
- Camilli, G. 1990: The test of homogeneity for 2 2 contingency tables: a review of and some personal opinions on the controversy. *Psychol. Bull.* **108**: 135-145.
- Chen J. J., Novick M. R. 1984: Bayesian analysis for binomial models with general beta prior distributions. *J. of Educational Statistics*. **9**: 163-175.
- Cormack R. S., Mantel N. 1991: Fisher's exact test: the marginal totals as seen from two different angles. *Statistician*. **40**: 7-34.
- D'Agostino R. B., Chase W., Belanger A. 1988: The appropriateness of some common procedures for testing equality of two independent binomial proportions. *Am. Stat.* **42**: 198-202.
- Essenberg J. M. 1952: Cigarette smoke and the incidence of primary neoplasm of the lung in albino mice. *Science*. **116**: 561-562.
- Fisher R. A. 1934: *Statistical methods for Research Workers*. (Originally published 1925, 14 ed. 1970). Oliver and Boyd. Edinburgh.
- Fisher R. A. 1935a: *The Design of Experiments*. Edinburgh, London: Oliver and Boyd.
- Fisher R. A. 1935b: The logic of inductive inference (with discussion). *J. R. Stat. Soc. Ser. A*. **98**: 39-82.
- Ganjali M., Berridge D. 2007a: Conditional Bayesian Hypothesis Testing for 2×2 Tables. 56-Proceedings of the International Statistical Institute: 22-29 AUG. Lisboa. Portugal.
- Ganjali M., Berridge D. 2007b: Conditional Bayesian Hypothesis Testing for 2×2 Tables. Accepted by PJS.
- Haber M. 1986: An exact unconditional test for the 2×2 comparative trial. *Psychol. Bull.* **99**: 129-132.
- Hashemi L., Nandram B., Goldberg R. 1997: Bayesian analysis for a single 2×2 table. *Statistics in Medicine*. **16**: 1311-1328.
- Howard J. V. 1998: The 2×2 table: A discussion from a Bayesian viewpoint. *Statistical Science*. Vol. 13, No **4**: 351-367.
- Jeffreys H. 1961: *Theory of Probability*. Oxford University Press.
- Johnson V. E., Albert J. H. 1999: *Ordinal Data Modeling*. Springer.
- Kass R., Raftery A. 1995: Bayes Factors. *J. American Statist. Assoc.* **90**: 773-795.
- Lehman E. L., Casella G. 1998: *Theory of Point Estimation*. (2nd ed.). Springer.
- Leonard T. 1975: Bayesian estimation methods for two-way contingency tables. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*. **37**: 23-37.
- Little J. A. L. 1989: Testing the equality of two independent binomial proportions. *Am. Stat.* Vol. 43, No **4**: 283-288.
- Lloyd C. J. 1988: Doubling the one-sided P-value in testing independence in 2×2 tables against a two-sided alternative. *Statistics in Medicine*. **5**: 629-635.
- Martin A. A., Tejedor I. H. 1995: Is Fisher's exact test very conservative? *Communication in Statistics and Data Analysis*. **19**: 579-591.
- Nurminen M., Mutanen P. 1987: Exact Bayesian analysis of two proportions. *Scand. J. Stat.* **14**: 67-77.
- Overall J. E., Rhoades H. M., Starbuck R. R. 1987: Small-sample tests for homogeneity of response probabilities in 2 2 contingency tables. *Psychol. Bull.* **102**: 307-314.
- Reid N. 1995: The roles of conditioning in inference (discussion: P173-199). *Statistical Science*. **10**: 138-157.

- Rice W. R. 1988: A new probability model for determining exact P values for 2 2 contingency tables when comparing binomial proportions. *Biometrics*. **44**: 1-22.
- Richardson J. T. E. 1990: Variants of chi-square for 2 2 contingency tables. *Br. J. Math. Statist. Psychol.* 43: 309-326.
- Robert C. P. 2001: A Bayesian Choice. Springer.
- Routledge R. D. 1992: Resolving the conflict over Fisher's exact test. *Canadian J. Stat.* **20**: 201-209.
- Storer B. E., Kim C. 1990: Exact properties of some exact test statistics for comparing two binomial proportions. *J. Am. Stat. Assoc.* **85**: 146-155.
- Upton G. J. G. 1982: A comparison of alternative tests for the 2 2 comparative trial. *J. R. Stat. Soc. Ser. A.* **145**: 86-105.
- Upton G. J. G. 1992: Fisher's exact test. *J. R. Stat. Soc. Ser. A.* **155**: 395-402.
- Wilcoxon F. 1945: Individual comparison by ranking methods. *Biometrics*. **1**: 80-83.
- Yates F. 1984: Tests of significance for 2 2 contingency tables (with discussion). *J. R. Stat. Soc. Ser. A.* **147**: 426-463.