حل عددی معادله‌ی غیر خطی شرودینگر و بررسی جواب‌های تکین

سید محمد حسینی*، لادن شرفیان سیگارودی
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
* مسئول مکاتبات- آدرس الکترونیکی: *hossei_m@modares.ac.ir*
(دریافت: ۸۴/۴/۲۷ ؛ پذیرش: ۸۶/۱۰/۷)

چکیده

معادله‌ی غیر خطی شرودینگر (NLS= Non linear Schordinger) یکی از معادلات مطرح در مکانیک کوانتوم است که غالباً جهت توصیف حرکت موجی شکل ذرات کوچک مانند الکترون در هسته‌ی اتم به کار می‌رود. این معادله به سه حالت کلی بحرانی (critical) ، ابر بحرانی (super critical) و تقریباً بحرانی (sub critical) تقسیم می‌شود. در این مقاله سعی می‌شود روش‌های عددی برای حل حالت بحرانی معادله‌ی شرودینگر(CNLS) در ابعاد مختلف ارائه شود، هم چنین اثرات گسسته سازی در جواب‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. جواب‌های حاصل از حل عددی CNLS به ازای بعضی مقادیر اولیه در زمان‌های کوچک t تکین می‌شود (در رسم جواب‌ها پاشندگی (Blowup) مشاهده می‌شود) ، اما با استفاده از تفاضلات متناهی جهت تخمین لاپلاسین موجود در معادله به جایی می‌رسیم که معادله‌ی گسسته شده تخمین دقیق تری از شکل اصلاح شده‌ی CNLS خواهد بود و ثابت می‌شود که می‌تواند جواب موضعی نیزداشته باشد (وجود جواب موضعی به معنای عدم پاشندگی جواب است). با ایجاد پریشندگی‌های کوچک در شکل معادله‌ی اصلی، معادله‌ی اصلاح شده حاصل می‌شود و به این ترتیب می‌توان از وقوع پاشندگی در جواب‌های حاصل از حل عددی معادله تا حدودی جلوگیری کرد.

واژه‌های کلیدی: معادله‌ی غیر خطی شرودینگر، پاشندگی، نوسانات کانونی و واکانونی ، گسسته سازی ، تکینی، جواب موضعی.

۱- مقدمه :

معادله غیر خطی شرودینگر(NLS):

$$i\psi_t(t,x)+\Delta\psi+k|\psi|^{2\sigma}\psi=0$$

$$x\in R^d\,,\quad \Delta=\partial_{x_1x_1}+\dots+\partial_{x_dx_d} \qquad (۱-۱)$$

با توجه به بازه ای که σd در آن قرار می‌گیرد به سه دسته‌ی کلی تقسیم می‌شود (Fibich & Ilan 2003):

۱) اگر ۲> σd باشد NLS را زیر بحرانی (Sub Critical) یا تقریباً بحرانی گویند در این حالت جواب‌های معادله به صورت موضعی موجود است .

۲) اگر۲= σd باشد NLS را بحرانی(Critical) گویند در این حالت جواب‌های معادله به ازای بعضی مقادیر اولیه در tهای کوچک تکین می‌شود.

۳) اگر ۲<σd باشد NLS را ابر بحرانی (Super Critical) گویند در این حالت جواب‌های معادله به ازای دسته‌ی بزرگی از مقادیر اولیه در tهای کوچک تکین می‌شود.

هم چنین اگر ۰< k باشد NLS را کانونی گویند و اگر ۰>k باشدNLS را واکانونی گویند.

معادله‌ی شرودینگر یکی از معادلات مطرح در مکانیک کوانتوم است که غالباً جهت توصیف حرکت موجی شکل ذرات کوچک به کار می‌رود مانند حرکت موجی شکل الکترون در اتم. در این مقاله محاسبه‌ی شکل کلی شرودینگر از تبدیل فوریه نشان داده می‌شود و ضمن ارائه مفاهیم فیزیکی مربوطه ، شکل بحرانی ۱+۲ بعدی آن با شرایط مرزی و اولیه حل می‌شود.

۲- شکل کلی معادله‌ی شرودینگر

تبدیل فوریه با هسته e^{ikx}:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(k)e^{ikx}\,dk \qquad (۱-۲)$$

تبدیل تابع موج از فضای اندازه حرکت K بر پایه‌ی هسته‌ی e^{ikx} به فضای موقعیت X می‌باشد هم چنین انتگرالگیری روی بازه $(-\infty,+\infty)$ می‌باشد. در حالت کلی برای یک موج تخت ساده تابع موج زیرتعریف می‌شود:

$$e^{ikx-i\omega t}$$

که $\omega=2\pi\upsilon$ همان فرکانس زاویه ای است و ω تابعی از λ طول موج می‌باشد . از (۲-۱) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f(x,t)=\int g(k)e^{ikx-i\omega(k)t}\,dk \qquad (۲-۲)$$

که (۲-۲) ذره ای با اندازه حرکت ρ و انرژی جنبشی $E=\frac{\rho^2}{2m}$ و

سرعت قله‌ی موج $v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{\rho}{m}$ را نمایش می‌دهد و:

$$E=\frac{\rho^2}{2m}=\hbar\omega\Rightarrow\omega=\frac{\rho^2}{2m\hbar}$$ ($\hbar$ ثابت پلانک)

در نهایت (۲-۲) را بر حسب ρ می‌توان نوشت:

$$\psi(x,t)=\int d(\frac{p}{\hbar})\phi(\frac{p}{\hbar})e^{-\frac{e}{\hbar}-i\frac{e}{\hbar}}$$

با استفاده از انتگرال گیری شکل کلی معادله‌ی شرودینگر حاصل می‌شود (گاسیوروویچ ۱۳۸۵).

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\frac{-\hbar^2\partial^2\psi(x,t)}{2m\partial x^2}$$

۳- تئوری اساسی خودکانونی

برای NLS دو مشخصه مهم زیر تعریف می‌شود:

توان (در مباحث فیزیک نور توان پرتوی لیزر نیز نامیده می‌شود):

$$N(t)=\frac{1}{2\pi}\int|\psi|^2dxdy\equiv N(0)$$

که با تعریف نرم L_2 معادل است. و هامیلتونی:

$$H(t)=\frac{1}{2\pi}(\int|\nabla\perp\psi|^2dxdy-\frac{k}{\sigma+1}\int|\psi|^{2\sigma+2}dxdy)$$
$$\equiv H(0)$$

برای جواب‌های حاصل از حل عددی NLS ، یک شرط کافی وقوع تکینی: $H(\psi_0)<0$ است. و: $N(\psi_0)\geq N_c\cong1.86.2\pi$

شرط لازم وقوع تکینی می‌باشد. (N_c را توان بحرانی نامند، (Papanicolaou & Fibich 1998) ψ_0 مقدار ψ در زمان t=0 است.

تئوری اساسی خود کانونی: می‌گوییم $\psi\in H_0^1$ به ازای t به صورت موضعی موجود است اگر ψ نرم H^1 متناهی داشته باشد یعنی:

$$\|\psi\|_{H^1}<\infty,$$
$$\|\psi\|_{H^1}=(\int|\psi|^2dxdy+\int|\nabla\perp\psi|^2dxdy)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{\|f\|_2^2+\|\nabla f\|_2^2}$$

و می‌گوییم ψ پاشنده است هرگاه وجود داشته باشد t_c به طوریکه:

$$0\leq t\leq t_c\quad\lim_{t\to t_c}\|\psi(t,r)\|_{H^1}=\infty$$

و این معادل است با پاشندگی نرم L_2 گرادیان:

$$\lim_{t\to t_c}\int|\nabla\perp\psi|^2dxdy=\infty$$

لذا اگر $\|\psi(t,r)\|_{H^1}$ کراندر باشد جواب به ازای هر t به طور موضعی موجود است. اگر NLS واکانونی باشد (k<۰) منفی بودن $H(\psi)_0$ معادل است با کراندار بودن نرم گرادیان و در نتیجه جواب موضعی وجود دارد (Fibich & Merle 2001). بنابراین برای وقوع تکینی حالت کانونی CNLS (شرودینگر بحرانی) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در بین حالات مختلف برای شناسایی ویژگی پاشندگی به معادله‌ی شرودینگردو بعدی می‌پردازیم (σd ≥۲) و هم چنین در بررسی‌های بعدی خواهیم دید زمانی که σ=۱ است گسسته سازی و وقوع پاشندگی ارتباط نزدیکی با هم دارند و نسبت به ایجاد پریشندگی‌ها در معادله و تغییرات اولیه بسیار حساس است لذا حالت بحرانی ۲ =σd مبنای بررسی ما خواهد بود.

۴- حل عددی CNLS روی دایره واحد

داریم:

$$i\psi_t(t,r)+\Delta\psi+|\psi|^2\psi=0$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2}\tag{۱-۴}$$

هدف به دست آوردن مقدار ψ روی دایره‌ی واحد است با شرایط زیر:

$$\psi(0,r)=\psi_0(r)=c(1-r^2),c=2/7375$$
$$0\leq r\leq1,0\leq t,\frac{d}{dr}\psi(t,0)=0,\psi(t,1)=0$$

و لاپلاسین:

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

و تقارن شعاعی: $\psi(t,r)=\psi(t,-r)$.

با استفاده از تعریف r، لاپلاسین را بر حسب r می‌توان نوشت:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow$$
$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{r}$$
$$\Delta\psi=\partial_{rr}\psi+\frac{1}{r}\partial_r\psi$$

معادله‌ی (۴-۱) را به شکل معادله دیفرانسیل زیر نوشته:

$$\psi_t(t,r)=i(\Delta\psi+|\psi|^2\psi)$$

و از روش عددی پیشگو - اصلاحگر: ADAMS-BASHFORTH ADAMS-MOULTON درجه‌ی۲ جهت حل عددی آن استفاده می‌شود (Fibich & Merle 2001). ابتدا توسط فرمول پیشگو و مقدار ψ در زمان t، مقدار ψ در زمان t+dt را پیشگویی می‌کنیم (ψ_{pre}) و سپس ψ_{pre} را در فرمول اصلاحگر قرار داده و اصلاح می‌کنیم هم چنین $\Delta\psi$ را با فرمول کرانک نیکسون ضمنی:

$$\Delta\psi(t,r)=\frac{1}{2}(\Delta\psi(t+dt,r)+\Delta\psi(t,r))$$

جایگزاری می‌کنیم و در نهایت داریم:

مرحله‌ی پیشگو:

$$\begin{aligned}(1-i\frac{dt}{2}\Delta)\psi_{pre}&=(1+i\frac{dt}{2}\Delta)\psi(t,r)\\&+idt\frac{3}{2}|\psi|^2\psi(t,r)+idt\frac{1}{2}|\psi|^2\psi(t-dt,r)\end{aligned} \tag{۴-۲}$$

و مرحله‌ی اصلاحگر:

$$\begin{aligned}(1-i\frac{dt}{2}\Delta)\psi(t+dt,r)&=(1+i\frac{dt}{2}\Delta)\psi(t,r)\\&+idt\frac{1}{2}|\psi|^2\psi(t,r)+idt\frac{1}{2}|\psi_{pre}|^2\psi_{pre}\end{aligned} \tag{۴-۳}$$

چند نکته:

۱) لاپلاسین در مرزها از بسط مرتبه‌ی ۴ یک طرفه تخمین زده می‌شود.

۲) با توجه به اینکه روش ضمنی است پس برای حل آن نیاز به محاسبه‌ی دستگاه و ضرایب ماتریس داریم.

۳) با توجه به این که سمت راست دو معادله‌ی (۴-۲) و (۴-۳) که ماتریس ضرایب مقادیر مجهول ψ_{pre} و $\psi(t+d_t,r)$ را تشکیل می‌دهند یکسان است لذا ماتریس ضرایب یک بار محاسبه می‌شود.

۴- ۱- بررسی نتایج عددی مربوط به حل عددی CNLS روی دایره‌ی واحد

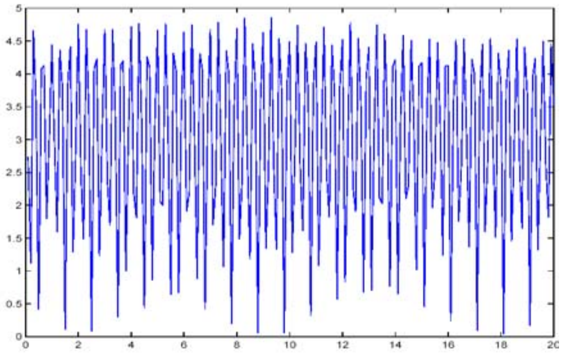
پویایی‌های جواب‌ها به ازای مقادیر اولیه ای که توانی کوچکتر ازتوان بحرانی دارند، به ازای تمام زمان‌ها مشاهده می‌شود. همان طور که قبلاً گفته شد CNLS به ازای برخی مقادیر اولیه در زمان‌های کوچک تکین می‌شود،حال در نتایج اولیه خواهیم دید که مقادیر اولیه ای که نرم L_2 آن‌ها از توان بحرانی بیشتر باشد باعث وقوع تکینی جواب‌ها در زمان‌های کوچک می‌شوند و در جواب‌های حاصل از حل عددی به ازای مقادیر اولیه ای که نرم L_2 آن‌ها کمتر از توان بحرانی باشد، نوسانات واکانونی مشاهده می‌شود و به عبارتی جواب‌ها خود کانونی می‌شوند و پاشندگی رخ نمی‌دهد. در نتایج عددی ارائه شده بعضی حقایق در ارتباط با این نوسانات و پویائی‌ها روشن می‌شود.

در شکل ۱ استفاده از مقدار اولیه $\psi_0=c(1-r^2)$ که $c=2.7375$ است باعث می‌شود که:

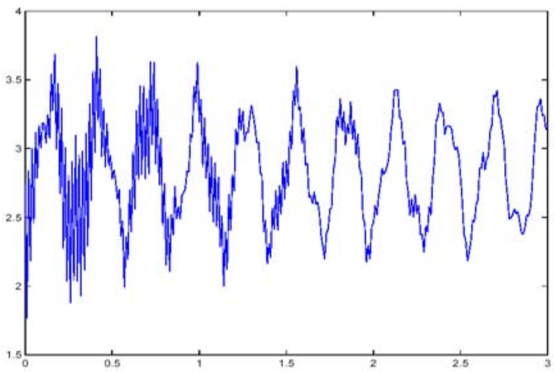
$$\|\psi_0\|_2^2\approx 0.34\,Nc$$

بنابراین همان طور که در شکل مشاهده می‌شود جواب‌ها پاشنده نشده (تکین نمی‌باشند) و نوسانات کانونی و واکانونی دارند.

رفتار عمومی‌جواب‌ها با توانی کمتر از توان بحرانی، نوسانات کانونی و واکانونی است، یعنی همان طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود خود کانونی می‌شود این نوسانات متناوب نیستند. با بررسی‌های عددی انجام شده معلوم شده که پویایی‌ها و برآمدگی‌های کوچکی در جواب‌ها (برای این مقدار اولیه) پدید می‌آید که مصنوعی است و با تغییر مقادیر dt و dr تغییر می‌کنند. بنابراین همان طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود جواب‌ها پاشنده نشده (تکین نمی‌باشند) و نوسانات کانونی و واکانونی دارند.



شکل ۱ مقدار اولیه $\psi_0=c(1-r^2)$ ، **برای** $c=2.7375$ ، $dt=0.01$ ، $dr=0.1$ **و در زمان** $t=20$.



شکل ۲: مقدار اولیه $\psi_0=c(1-r^2)$، $c=2.7375$ ، $dt=0.01$ ، $dr=0.1$ **و در زمان** $t=3$.

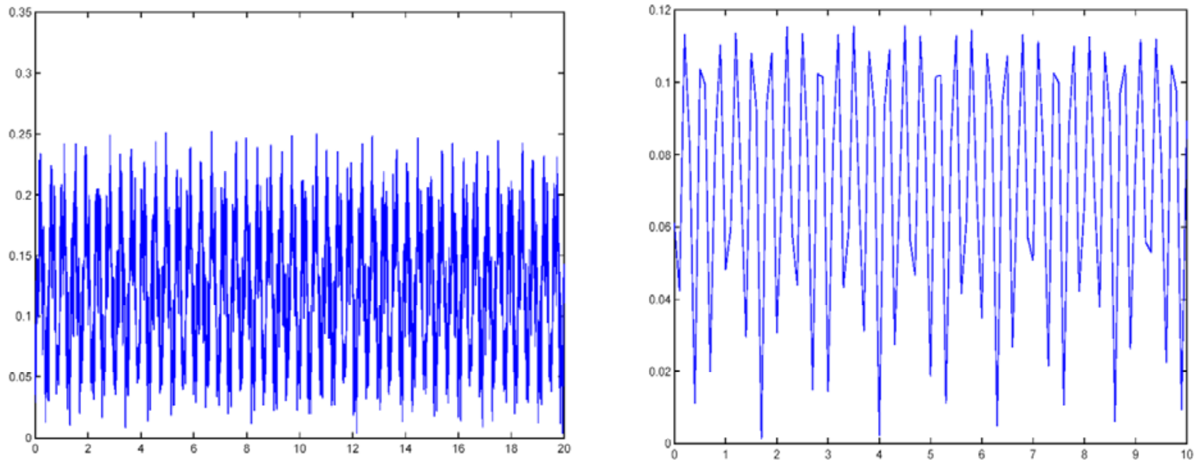
در شکل ۳ استفاده از مقدار اولیه $\psi_0=cJ_0(kr)$ که در آن $k=5.520$ و $c=4.465$ و J_0 تابع بسل می‌باشد، باعث می‌شود تا:

$$\|\psi_0\|_2^2\approx 0.676\,Nc$$

بنابراین همان طور که دراین شکل‌ها مشاهده می‌شود جواب‌ها پاشنده نشده (تکین نمی‌باشند) و نوسانات کانونی و واکانونی دارند.

در شکل ۴ داریم: $\|\psi_0\|_2^2\approx 1/1Nc$

در نتیجه جواب پاشنده شده است.



شکل ۳: مقدار اولیه $\psi_0 = cJ_0(kr)$، به ازای $k = 5.520$، $c = 4.645$ و در دو زمان $t = 10$ و $t = 20$.

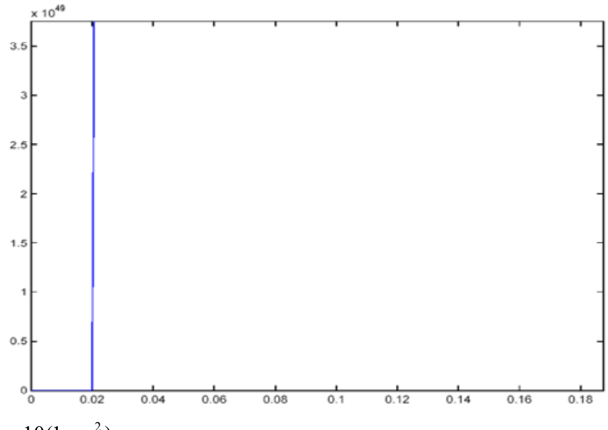
۵- حل عددی CNLS در بعد (۲+۱) و بررسی وجود جواب موضعی

معادله شرودینگر:

$$i\psi_t(t,x) + \Delta\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0$$

$$x \in R^d \ ,\Delta = \partial_{x_1x_1} + \ldots + \partial_{x_dx_d} \qquad (۵- ۱)$$

مفروض است بررسی می‌کنیم که در روش‌های استاندارد عددی گسسته سازی بسط چند بعدی مکانی و زمانی گرادیان و مشتقات جزئی (لاپلاسین)، باعث می‌شود که جواب‌هایی که می‌بایست تکین باشند به صورت موضعی وجود داشته باشد یعنی به جای مشاهده‌ی پاشندگی در شکل جواب‌ها، نوسانات کانونی مشاهده می‌شود. در این بخش اثر گسسته سازی چند بعدی در فرمول بندی تفاضلات متناهی NLS با استفاده از یک شکل کلی معادله اصلاح شده، بررسی می‌شود (Fibich & ILan 2003).



شکل ۴: نمونه ای از یک جواب پاشنده به ازای مقدار اولیه $\psi_0 = 10(1-r^2)$، $dt = 0.01$، $dr = 0.1$ و در زمان $t = 3$.

۵-۱- تفاضلات مرکزی درجه ۲

تفاضلات مرکزی درجه ۲ برای حل NLS، ۲+۱ بعدی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$i(\psi^{n,k})_t + \frac{\psi^{n-1,k} + \psi^{n,k-1} - 4\psi^{n,k} + \psi^{n,k+1} + \psi^{n+1,k}}{h^2} \qquad (۵-۲)$$
$$+ \left|\psi^{n,k}\right|^{2\sigma}\psi^{n,k} = 0$$

و

$$\frac{\psi^{n-1,k} + \psi^{n+1,k} - 4\psi^{n,k} + \psi^{n,k+1} + \psi^{n+1,k}}{h^2} =$$
$$(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + (\psi_{xxxx} + \psi_{yyyy})\frac{h^2}{12} + O(h^4)$$

بنابراین NLS شبه گسسته (۵- ۲) تخمین دقیق تری برای معادله‌ی اصلاح شده‌ی زیر می‌باشد:

$$i\psi_t(t,x,y) + \Delta\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi + \frac{h^2}{12}(\psi_{xxxx} + \psi_{yyyy}) = 0 \quad (۵- ۳)$$

۵- ۲- اثبات وجود جواب موضعی

معادله اصلاح شده‌ی (۵-۳) حالت خاصی از معادله‌ی زیراست:

$$i\psi_t(t,x,y) + \Delta\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi + (-1)^m\varepsilon\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^{2m}\varphi}{\partial x_i^{2m}} = ۰ \quad (۵- ۴)$$

به طوریکه $\varepsilon = Ch^{2m-2} > 0$ و c عددی ثابت است.

با توجه به تعاریف توان و هامیلتونی در قالب کلی:

$$H = \|\nabla\psi\|_2^2 - \frac{1}{\sigma+1}\|\psi\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2} - \varepsilon\sum_{i=1}^{d}\left\|\frac{\partial^m\varphi}{\partial x_i^m}\right\|_2^2 \quad (۵- ۵)$$

قضیه‌های زیر وجود دارد (Fibich & ILan 2003):

قضیه‌ی ۱: ψ را جواب معادله‌ی زیر در نظربگیرید.

$$i\psi_t(t,x)+\Delta\psi+|\psi|^{2\sigma}+(-1)^m\varepsilon\Delta^m\psi=0$$
$$\psi(0,x)=\psi_0(x)$$

بطوریکه $\psi_0(x)\in H^m$ و۲≤ n عددی صحیح است. آنگاه $\varepsilon>$۰ یک شرط کافی برای وجود جواب موضعی است. این قضیه را می‌توان به معادله‌ی (۵- ۵)تعمیم داد.

قضیه‌ی ۲: ψرا جوابی برای معادله‌ی (۵- ۵) در نظربگیرید به طوری که $\psi(0,x)=\psi_0(x)$ و۲≤ m عدد صحیح باشد. آنگاه $\varepsilon>0$ یک شرط کافی برای وجود جواب موضعی است.

۵- ۳- بررسی نتایج عددی مربوطه به حل عددی CNLS (۱+۲ بعدی)

در این مرحله ابتدا معادله‌ی ۵-۱ با σ =۱ و d=۲ و شرایط اولیه‌ی گاوسی: $\psi_0=Ce^{-x^2-y^2}$ حل می‌شود.

مقدار c=۲,۹۹ به گونه ای انتخاب شده است که توان اولیه بزرگ تر از توان بحرانی $(N_c\approx 11.7)$باشد،

$$N(0)=\|\psi_0\|_2^2=14.03=1.2Nc$$

سپس همان معادله‌ی (۵-۱) با σ =۱ و d=۲ با شرایط اولیه‌ی:

$$\psi_0=10(1-(x^2+y^2))$$

حل می‌شود. که باز هم توان اولیه بزرگتر از توان بحرانی است:

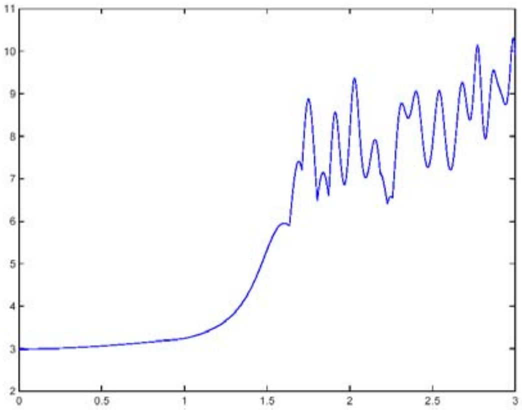
$$N(0)=\|\psi_0\|_2^2\approx 1.1Nc$$

و در نهایت یک معادله‌ی ابر بحرانی با شرایط اولیه $\psi_0(x)=1.5e^{-x^2}$حل می‌شود.

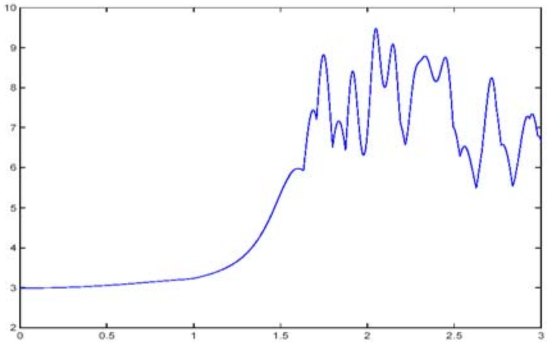
روش عددی به کار گرفته شده روش رنگه کوتا می‌باشد. به دلیل عدم جایگزینی لاپلاسین با یک روش ضمنی (بر خلاف بخش ۴)، کل معادلات را می‌توان از روش صریح حل کرد، و روش صریح رنگه کوتا نسبت به روش‌های صریح دیگر از دقت بیشتر و زمان محاسبه‌ی کمتری برخوردار است (Stoer & Bulirsh 1991). نتایج عددی ارائه شده در بخش‌های ۵- ۳- ۱ الی ۵- ۳- ۳ نشان دهنده‌ی وجود جواب موضعی و عدم پاشندگی جواب است. (Fibich & ILan 2003)

۵- ۳- ۱- حل عددی با شرایط اولیه‌ی گاوسی

جهت حل عددی (۵- ۱) از گسسته سازی چند بعدی درجه ۲ استفاده شده است. در این روش طول گام زمانی به اندازه‌ی کافی کوچک انتخاب می‌شود تا گسسته سازی زمانی اثر چندانی نداشته باشد و در شکل ۵ و ۶ می‌بینیم جواب NLS گسسته شده پاشنده نشده و متحمل نوسانات کانونی و واکانونی شده است. در صورتی که جواب دقیق NLS می‌بایست در زمان متناهی پاشنده می‌شد. علت این امر این است که معادله‌ی گسسته شده (۵- ۲) تخمینی است از معادله‌ی اصلاح شده‌ی (۵- ۳)، که با توجه به اثبات قضیه‌ی ۲ جواب موضعی دارد.



شکل ۵: مقداراولیه $\psi_0=ce^{-x^2-y^2}$و به ازای $c=2.99$ ،$dt=0.01$، $dh=0.1$ و $x=y=1$ و در زمان $t=3$.

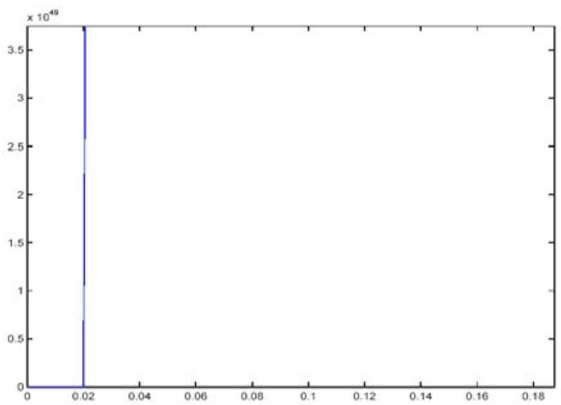


شکل ۶: مقداراولیه $\psi_0=ce^{-x^2-y^2}$، به ازای $c=2.99$ ،$dt=0.0005$، $dh=0.05$ و $x=y=1$ و در زمان $t=3$.

۵- ۳- ۲- شرایط اولیه بحرانی $\psi_0=10(1-(x^2+y^2))$

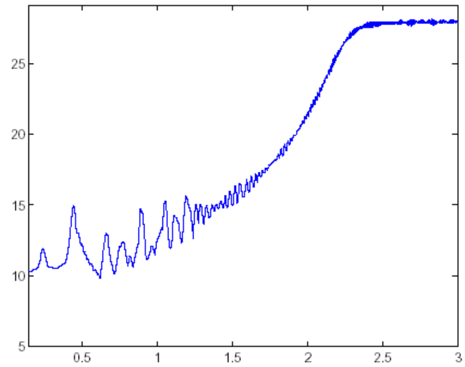
همانطور که در بخش ۱ و در شکل ۴ مشاهده کردیم، معادله (۵-۱) با شرایط اولیه‌ی $\psi_0=10(1-(x^2+y^2))$ دارای جواب واگرا می‌باشد زیرا: $\|\psi_0\|_2^2\approx 1.1Nc$.

نمونهٔ جواب واگرا را مجدداً در شکل ۷ مشاهده می کنیم. باحل دوباره این معادله با شرایط اولیه $\psi_0=10(1-(x^2+y^2))$ با



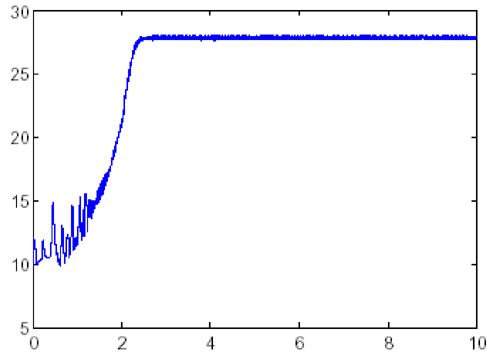
شکل ۷: $\psi_0=10(1-(x^2+y^2))$، $dt=0.01$، $dh=0.1$، $x=y=1$.

روش‌های ارائه شده در بخش‌های ۵-۱ الی ۵-۳ ، در شکل ۸ جواب‌ها پاشنده (واگرا) نشده و نوسانات کانونی و واکانونی مشاهده می‌شود:



شکل ۸ : $\psi_0 = 10(1-(x^2+y^2))$ و $dt = 0.01$ و $dh = 0.001$ و $x = y = 1$ و در زمان $t = 3$ **رسم شده است.**

بنابراین با استفاده از گسسته سازی مرکزی درجه ۲ و استفاده از روش رنگه کوتا، در جواب‌ها پاشندگی مشاهده نمی‌شود بلکه با توجه به شکل ۹، پس از یکسری نوسانات نا منظم، رفتاری متمرکز حول یک محور دارند.



شکل ۹: $\psi_0 = 10(1-(x^2+y^2))$، **dt=۰,۰۱ و dh=۰,۰۰۱، x=y=۱، در زمان t= ۱۰.**

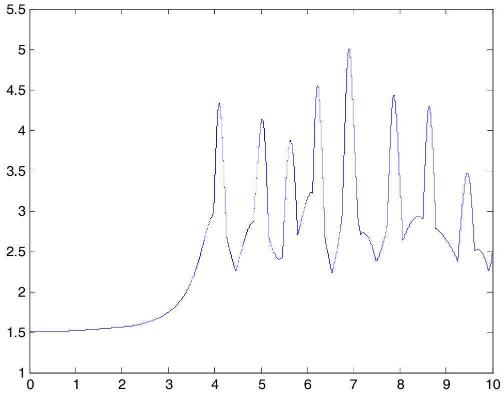
۵- ۳- ۳- حل عددی یک معادله‌ی ابر بحرانی

در این بخش معادله‌ی ابر بحرانی شرودینگر (super critical NLS):

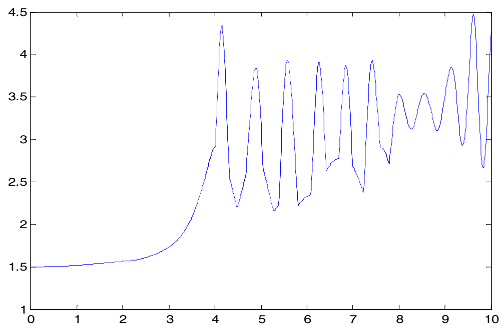
$$i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^6\psi = 0$$

در یک بعد مکانی d=۱ و۳ = σ و با شرایط اولیه $\psi_0(x) = 1.5e^{-x^2}$ حل شده است. جواب‌های معادله فوق با شرایط اولیه ذکر شده باید در زمان کوچک تکین شود (Fibich & ILan 2003). ولیکن حل این معادله با استفاده از روش‌های بیان شده در بخش‌های ۵- ۱ الی ۵- ۳ نتایج زیر را دارد.

همان طور که در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ مشاهده می‌شود در شکل جواب تکینی رخ نمی‌دهد بلکه با توجه به قضیه ۲ در بخش ۵- ۲ جواب موضعی وجود دارد و یکسری نوسانات متمرکز مشاهده می‌شود، و این به علت استفاده از گسسته سازی مرکزی درجه ۲ و روش صریح رنگه کوتا می‌باشد.



شکل ۱۰ : $dt = 0.001$ و $dh = 0.01$ **در زمان** $t = 10$ **رسم شده است.**



شکل ۱۱: dt= ۰۰۱ و dh= ۰,۰۰۱ در زمان t=۱۰ رسم شده است

۶- جمع بندی

از آن جا که معادله‌ی شرودینگر بحرانی یکی از معادلات کاربردی در ریاضی فیزیک است،روش‌های مختلفی جهت حل آن ارائه شده است که هر کدام موفقیت‌های خاص خود را داشته اند، لیکن زمانی که برای جلوگیری از وقوع تکینی شرایطی خاص به معادله اضافه می‌شود این روش‌ها کاربرد چندانی نداشته اند و تنها روش گسسته سازی که در بخش‌های ۴ و ۵ توضیح داده شد نتایج بهتری ارائه کرده است. هم چنین روش صریح رنگه کوتا روش نسبتاً مطلوبی جهت رسیدن به جواب‌های موضعی معادله می‌باشد. از طرف دیگر با ایجاد پریشندگی‌های کوچک در معادله‌ی NLS معادله‌ی اصلاح شده ای حاصل می‌شود که به ازای تمام مقادیر اولیه، جواب موضعی دارد و با روش عددی گسسته سازی و روش صریح رنگه کوتا می‌توان به این جواب‌ها دست یافت.

منابع:

Fibich G., ILan B. 2003: Discretization effects in the nonlinear schordinger equation. Applied. *Numerical Mathematics.* **44**: 63-75.
Fibich G., Merle F. 2001: Self-focusing on bounded domains. *physica D.* **155:** 132-158.
Gasiorowicz S. 2003: Quantum Physics, *John Wiley & Sons Inc*, pp: 37-45.
Papanicolow G., Fibich G. 1997: A modulation method for self-focusing in the perturbed critical nonlinear Schrodinger equation.
Stoer J., Burlirsh R.1991: Introduction to numerical analysis. German. Springer, Verlag.