ابر گروه‌های γ_n -کامل و γ_n^* -کامل

بیژن دواز*، محمد کریمیان
دانشکده علوم، دانشگاه یزد، یزد، ایران
* مسئول مکاتبات- آدرس الکترونیکی: *b.davvaz@yazduni.ac.ir*

(دریافت: ۸۳/۱۱/۳۰ ؛ پذیرش:۸۴/۵/۳)

چکیده

در این مقاله، برای اولین بار ابر گروه γ_n- کامل و ابر گروه γ_n^*- کامل را تعریف می‌کنیم. ابرگروه H را γ_n- کامل گوییم در صورتی که برای هر $(z_1,z_2,...,z_n)\in H^n$ ، $\sigma\in S_n$ داشته باشیم $\Pi_{i=1}^n z_{\sigma(i)}=\gamma(\Pi_{i=1}^n z_i)$. ثابت می‌کنیم هرگاه H یک ابرگروه γ_n- کامل باشد آنگاه $\gamma^*=\gamma_n$. همچنین، هرگاه H یک ابرگروه γ_2- کامل باشد آنگاه H یک ابر گروه کامل است. ابرگروه H یک ابرگروه γ_n^*- کامل است در صورتی که داشته باشیم $\gamma_n^*=\gamma$ ، $\gamma_n^*\neq\gamma_{n-1}^*$. ثابت می‌کنیم ابرگروه H یک ابرگروه γ_1^*- کامل است اگر و تنها اگر یک گروه آبلی باشد.

واژه‌های کلیدی: ابرگروه، ابرگروه‌های γ_n- کامل، ابرگروه‌های γ_n^*- کامل.

مقدمه

ابرساختارهای جبری در سال ۱۹۳۴، توسط مارتی، در کنگره‌ی ریاضیدانان اسکاندیناوی معرفی شدند. ابرساختارهای جبری کاربردهای زیادی در ریاضیات محض و کاربردی دارند. یک ابرگروه در نظریه‌ی مارتی عبارت است از یک مجموعه‌ی ناتهی H همراه با ابرعمل $\circ$ از $H\times H$ به خانواده‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های ناتهی H که در قوانین شرکت‌پذیری و تکثیر صدق می‌کند.

کلاس‌های هم ارزیِ حاصل از یک رابطه‌ی هم ارزی به طور قوی منظم، ارتباط بین نظریه‌ی ابرگروه‌ها و نظریه‌ی گروه‌ها را نشان می‌دهد. رابطه‌ی γ را فرنی در سال ۲۰۰۲، تعریف کرد و نشان داد H/γ^* یک نیم گروه آبلی است. هم ارزی بودن رابطه‌ی γ روی ابرگروه‌ها را اثبات می‌کنیم.

دربخش پنجم، ابرگروه γ_n- کامل را تعریف می‌کنیم. ابرگروه H را γ_n- کامل گوییم درصورتی که به ازای هر $(z_1,z_2,...,z_n)\in H^n$ و $\sigma\in S_n$ داشته باشیم $\Pi_{i=1}^n z_{\sigma(i)}=\gamma(\Pi_{i=1}^n z_i)$. ثابت می‌کنیم هرگاه H یک ابرگروه γ_n- کامل باشد، آنگاه $\gamma^*=\gamma_n$. به علاوه دراین بخش، ابرگروه γ_n^*- کامل را تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم ابرگروه H یک ابرگروه γ_n^*- کامل است درصورتی که داشته باشیم $\gamma_n^*=\gamma$ و همچنین ابرگروه H یک ابرگروه γ_1^*- کامل است اگر و تنها یک گروه آبلی باشد.

۲ نمادگذاری و تعاریف اولیه

تعریف ۲ . ۱. فرض کنیم H مجموعه‌ای ناتهی و $P^*(H)$ مجموعه همه زیر مجموعه های ناتهی H باشد؛ $\circ$ را یک ابر عمل روی H و جفت مرتب $(H,\circ)$ را یک ابر ساختار یا یک ابر گروهوار گوییم درصورتی که $\circ: H\times H\to P^*(H)$ یک تابع باشد. فرض کنیم $\circ$ یک ابر عمل روی H است. تصویر $(x.y)\in H^2$ تحت $\circ$ را با $x\circ y$ نشان می‌دهیم در واقع $x\circ y$ زیر مجموعه‌ای ناتهی از H است. هرگاه A و B زیرمجموعه‌های ناتهی H باشند آنگاه قراردادهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A\circ B:=\bigcup_{a\in A,b\in B} a\circ b,$$
$$A\circ x:=A\circ\{x\},\quad x\circ A:=\{x\}\circ A.$$

تعریف ۲ . ۲ . ابرعمل $\circ$ را شرکت پذیر گوییم هرگاه به ازای به ازای هر $(x,y,z)\in H^3$ داشته باشیم: $(x\circ y)\circ z=(y\circ z)$. که در این صورت $(H,\circ)$ را یک نیم ابرگروه گوییم.

تعریف ۲ . ۳ . نیم ابرگروه $(H,\circ)$ را یک ابرگروه گوییم در صورتی که به ازای هر $a\in H$ ، داشته باشیم:

$$a\circ H=H\circ a=H$$

شرط فوق خاصیت تکثیر نامیده می‌شود.

تعریف ۲ . ۴ . فرض کنیم $(H,\circ)$ یک ابرگروه و K یک زیرمجموعه‌ی ناتهی H است. هرگاه $K \circ K \subseteq K$ آنگاه $(K,\circ)$ یک زیرابرگروهوار H نامیده می‌شود. زیر ابرگروهوار K را یک زیرابرگروه گوییم درصورتی که به ازای هر

$$\boldsymbol{a \in K} \quad , \quad K \circ a = a \circ K = K.$$

نمادگذاری ۲ . ۵ . فرض کنیم R رابطه‌ای روی H باشد.

الف. به ازای هر $B, A \in P^*(H)$، رابطه $A\overline{R}B$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A\overline{R}B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \exists b \in B: \ aRb, \\ \forall b \in B, \exists a \in A: \ aRb. \end{cases}$$

ب. با استفاده از قسمت قبل، $A\overline{\overline{R}}B$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$A\overline{\overline{R}}B \Leftrightarrow \forall a \in A. \forall b \in B: \ aRb.$$

تعریف ۲ . ۶ . فرض کنیم H یک نیم ابرگروه است.

الف. رابطه‌ی R روی H را منظم راست گوییم هرگاه به ازای هر $(x,y,z) \in H^3$ داشته باشیم:

$$xRy \Rightarrow x \circ a\overline{R}y \circ a.$$

به طریق مشابه، رابطه‌ی منظم چپ را نیز می‌توان تعریف کرد. رابطه‌ی R را منظم گوییم در صورتی که منظم چپ و راست باشد.

ب. رابطه‌ی R روی H را قویاً منظم راست نامیده می‌شود در صورتی که به ازای هر $(x,y,z) \in H^3$

$$xRy \Rightarrow x \circ a\overline{\overline{R}}y \circ a.$$

به طریق مشابه، رابطه قویاً منظم چپ را نیز می‌توان تعریف کرد. رابطه‌ی R را قویاً منظم چپ و قویاً منظم راست باشد.

تعریف ۲ . ۷ . فرض کنیم α رابطه‌ای انعکاسی و تقارنی است. کوچکترین رابطه‌ی هم ارزی شامل α را بستار انتقالی α گوییم و با α^* نشان می‌دهیم. بنابراین

$$a\alpha^*b \Leftrightarrow \exists n \in N, \exists(x_1, x_2, ..., x_n) \in H^n:$$
$$a = x_1, \quad b = x_n,$$
$$x_1\alpha x_2 \alpha x_3 ... \alpha x_{n-1} \alpha x_n.$$

تعریف ۲ . ۸ . فرض کنیم $(H,\circ)$ یک نیم ابرگروه است. به ازای هر $(a,b) \in H^2$ رابطه‌های زیر برقرارند:

$$(\beta_1)_H := \{(x,x) \mid x \in H\},$$

$$\forall n \in N. n\rangle 1, \quad a(\beta_n)_H b \Leftrightarrow \exists(z_1, z_2, ..., z_n) \in H^n:$$
$$\{a,b\} \subseteq \prod_{i=1}^{n} z_i,$$
$$(\beta)_H := \bigcup_{n\geq 1}(\beta_n)_H.$$

هرگاه تاکیدی بر نیم ابرگوه H نباشد آنگاه $(\beta_n)_H$، $(\beta)_H$ و $(\beta_1)_H$ را با β_n، β و β_1 نشان می‌دهیم. رابطه‌ی β یک رابطه‌ی انعکاسی و تقارنی است.

قضیه ۲ . ۹ . فرض کنیم $(H,\circ)$ یک ابرگروه است. دراین صورت β^* کوچکترین رابطه‌ی هم ارزی قویاً منظم روی H است.

تعریف ۲ . ۱۰ . فرض کنیم $(H,\circ)$ و $(H',*)$ ابرگروهوار باشند.

الف. تابع $f: H \to H'$ را همریختی شمولی گوییم درصورتی که به ازای هر $(x,y) \in H^2$

$$f(x \circ y) \subset f(x) * f(y).$$

لم ۲ . ۱۱ . فرض کنیم $(H,\circ)$ یک ابرگروه و $(H',*)$ یک نیم ابرگروه است. هرگاه $f: H \to H'$ همریختی قوی باشد آنگاه Imf یک زیرابرگروه H' است.

برهان. (Koskas 1963).

قضیه ۲ . ۱۲ . فرض کنیم $(H,\circ)$ یک نیم ابرگروه و R رابطه‌ای هم ارزی روی H است. در این صورت احکام زیر برقرارند:

(الف) هرگاه R رابطه‌ای منظم باشد آنگاه H/R، خانواده رده‌های هم ارزی روی H، با ضرب (۱) یک نیم ابرگروه است.

$$\forall (x,y,z) \in H^3, \overline{x} \otimes \overline{y} := \{\overline{z} | z \in x \circ y\} (1).$$

(ب) بعکس، فرض کنیم R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی H است. هرگاه H/R با ضرب (۱) یک نیم ابرگروه باشد آنگاه رابطه‌ی R یک رابطه‌ی منظم است.

(ج) با مفروضات قسمت الف، هرگاه $\Pi: H \to H/R$ نگاشت تصویر باشد آنگاه Π یک همریختی پوشای قوی است. به علاوه هر گاه $(H,\circ)$ یک ابرگروه باشد آنگاه $(H/R,\otimes)$ یک ابرگروه است.

برهان. (Corsini 1970).

قضیه ۲ . ۱۳ . فرض کنیم R یک رابطه‌ی هم ارزی قویاً منظم روی نیم ابرگروه H است. در این صورت احکام زیر برقرار است:

الف. $(H/R,\otimes)$ یک نیم گروه است.

ب. هرگاه H ابرگروه باشد آنگاه $(H/R,\otimes)$ یک گروه است.

ج. فرض کنیم $f: H \to S$ یک همریختی و S یک نیم گروه است. در این صورت رابطه‌ی R، وابسته به F، یک رابطه‌ی هم ارزی قویاً منظم است.
برهان. (Marty 1970).

نتیجه ۲ . ۱۴ . فرض کنیم H یک نیم ابرگروه است. در این صورت احکام زیر برقراراند:
الف. H/β^* یک نیم گروه است.
ب. نگاشت $\varphi: H \to H/\beta^*$ یک همریختی قوی است.
ج. رابطه‌ی β^* کوچکترین رابطه‌ی هم ارزی روی H است به طوری که H/β^* یک نیم گروه است.

تعریف ۲ . ۱۵ . فرض کنیم A زیرمجموعه‌ی ناتهی از نیم ابرگروه H است. A را بک زیر مجموعه کامل H گوییم در صورتی که به ازای هر $(x_1, x_2, ..., x_n) \in H^n, n \in N$ داشته باشیم:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \cap A \neq \Phi \Rightarrow \prod x_i \subseteq A.$$

تعریف ۲ . ۱۶ . فرض کنیم G یک گروه و $f: H \to G$ یک همریختی است. هسته‌ی f به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Kerf = \{x \in H \mid f(x) = 1_G\}.$$

تعریف ۲ . ۱۷ . فرض کنیم $\varphi_H :\to H/\beta^*$ نگاشت تصویری است. هسته‌ی φ_H را قلب H گوییم و با ω_H نشان می‌دهیم.

قضیه ۲ . ۱۸ . فرض کنیم

$$\varphi_H : H \to H/\beta^*, B \in P^*(H)$$

نگاشت تصویری است. در این صورت

$$\omega_H \circ B = B \circ \omega_H = \varphi_{H^{-1}}(\varphi_H(B)).$$

برهان. (Corsini 1970).

قضیه ۲ . ۱۹ . هرگاه H یک ابرگروه باشد آنگاه $\beta = \beta^*$.
برهان (Corsini 1970).

نمادگذاری ۲ . ۲۰ . فرض کنیم $(H,\circ)$ یک ابرگروهوار است. $\{A(x), x \in H\}$ را خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی H در نظر می‌گیریم که در شرایط زیر صدق کند:

$$\forall (x,y) \in H^2 : x \neq y \Rightarrow A(x) \cap A(y) = \phi.$$

$$b \in A(y) a \in A(x)(a,b) \in K^2{}_H$$

ابرعمل * را روی مجموعه‌ی : $K_H := \bigcup_{x \in H} A(x)$ به صورت زیر اختیار می‌کنیم:

$$a * b := \bigcup_{z \in x \circ y} A(z).$$

قضیه ۲ . ۳ . ۵ . بنابر نمادگذاری بالا، احکام زیر برقرار است:
الف. $(H,\circ)$ یک نیم ابرگروه است اگر و تنها اگر $(K_H, *)$ یک نیم ابرگروه باشد.
ب. $(H,\circ)$ یک ابرگروه است اگر و تنها اگر $(K_H, *)$ یک ابرگروه باشد.
برهان. (Dessalvo 1982).

۳ رابطه‌ی γ

در این بخش رابطه‌ی γ را تعریف کنیم و خواص ابتدایی آن را مورد مطالعه قرار دهیم S_n را گروه متقارن روی مجموعه‌ی $\{1,2,...,n\}$ در نظر می‌گیریم. حال می‌توان تعریف زیر را ارائه نمود.

تعریف ۳ . ۱ . فرض کنیم H یک نیم ابرگروه است. به ازای هر $(x,y) \in H^2$ تعریف می‌کنیم:

$$(\gamma_1)_H := \{(x,x) \mid x \in H\}$$

$$\forall n \rangle 1 : a\gamma_n b \Leftrightarrow \exists (z_1, z_2, ..., z_n) \in H^n, \exists \sigma S_n :$$

$$a \in \prod_{i=1}^{n} z_i, \quad b \in \prod_{i=1}^{n} z_{\sigma(i),}$$

$$\gamma := \bigcup_{n \geq 1} \gamma_n.$$

لم ۳ . ۲ . فرض کنیم H یک نیم ابرگروه است. در این صورت احکام زیر برقرار است.
الف. به ازای هر $\gamma_n, n \in N$ یک رابطه‌ی متقارن است.
ب. γ یک رابطه‌ی انعکاسی و متقارن است.

برهان. الف. بنابر تعریف، γ_1 یک رابطه‌ی متقارن است. فرض کنیم $n \rangle 1$، در این صورت هرگاه $x\gamma_n y$ آنگاه داریم:

$$\exists (z_1, z_2, ..., z_n) \in H^n, \exists \sigma \in S_n :$$

$$x \in \prod_{i=1}^{n} z_i, \quad y \in \prod_{i=1}^{n} z_{\sigma_{(i)}}.$$

$$z'_1 := z_{\sigma(1),} z'_2 := z_{\sigma(2),...,} z'_n := z_{\sigma(n) \Rightarrow}$$

$$y \in \prod_{i=1}^{n} z'_i, \quad x \in \prod_{i=1}^{n} z'_{\sigma^{-1}(i)} \Rightarrow y\gamma_n x.$$

ب. بنابر تعریف داریم $\gamma := \bigcup_{n\ge 1}\gamma_n$ و با توجه به قسمت قبل، حکم برقرار است.

قضیه ۳ . ۳ . رابطه‌ی γ^* یک رابطه‌ی هم‌ارزی قویاً منظم روی نیم ابرگروه H است.

برهان. بنابر تعریف، γ^* یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. به ازای هر $(a,x,y)\in H^3$ اثبات می‌کنیم که

$$x\gamma y \Rightarrow xa\overline{\overline{\gamma}}ya.$$

فرض کنیم $x\gamma y$، آنگاه $n\in N$ وجود دارد به طوری که :

$$x\gamma_n y \Rightarrow \exists (z_1,z_2,\dots,z_n)\in H^n,\ \exists\sigma\in S_n:$$

$$x\in\prod_{i=1}^n z_i,\quad y\in\prod_{i=1}^n z_{\sigma(i).}$$

هرگاه $z_{n+1}:=a$ ، $\tau\in S_{n+1}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$v\in xa\subseteq \prod_{i=1}^n z_i a = \prod_{i=1}^{n+1} zi,$$

پس $\omega\in ya\subseteq \prod_{i=1}^n z_{\sigma(i)^a} = \prod_{i=1}^{n+1} z_{\tau i}$. بنابراین $v\gamma_{n+1}\omega$ و در نتیجه $v\gamma\omega$. بنابراین $xa\overline{\overline{\gamma}}ya$. به طریق مشابه، هرگاه $x\gamma y$ آنگاه $ax\overline{\overline{\gamma}}ay$. حال فرض کنیم x^*y در این صورت $m\in N$، $(\omega_0,\omega_1,\dots\omega_n)\in H^{m+1}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $a\in H$ داریم:

$$x=\omega\circ\omega_m = y,\ \omega\circ\gamma\omega_1\dots\gamma\omega_m \Rightarrow$$

$$xa = \omega\circ a\overline{\overline{\gamma}}\omega_1 a\dots\overline{\overline{\gamma}}\omega_m a = ya.$$

بنابراین به ازای هر $\omega\in ya, v\in xa$ اعضای $z_{m-1}\in\omega_{m-1}a,\dots,z_1\in\omega_1 a$ وجود دارند به طوری که $v\gamma z_1\dots z_{m-1}\gamma\omega$. بنابراین γ^* یک رابطه‌ی هم ارزی قویاً منظم راست است. به طریق مشابه، دیده می‌شود که γ^* یک رابطه‌ی هم ارزی قویاً منظم چپ است.

نتیجه ۳ . ۴ . فرض کنیم H یک نیم ابرگروه است. در این صورت H/γ^* یک نیم گروه آبلی است. به علاوه هر گاه H یک ابرگروه باشد آنگاه H/γ^* یک گروه آبلی است.

برهان. بنابر قضیه قبل، γ^* یک رابطه‌ی هم‌ارزی قویاً منظم روی H است. هرگاه به ازای هر $(x,y)\in H^2$ داشته باشیم $\overline{x_1}\otimes\overline{x_2}=\{\overline{z}\,|\,z\in x_1x_2\}$ آنگاه $(H/r^*,\otimes)$ یک نیم گروه است.

فرض کنیم $\sigma=(1\ \ 2)\in S_2$ در این صورت داریم:

پس $\overline{x_1}\otimes\overline{x_2}=\overline z=\overline\omega=\overline{x_2}\otimes\overline{x_1}$. بنابراین $(H/\gamma^*,\otimes)$ یک نیم گروه آبلی است. هر گاه H یک ابرگروه باشد آنگاه با توجه به بحث بالا، H/γ^* یک گروه آبلی است.

قضیه ۳ . ۵ . فرض کنیم H یک نیم ابرگروه است. در این صورت γ^* کوچکترین رابطه‌ی هم‌ارزی قویاً منظم روی H است به طوری که $(H/R\ ,\otimes)$ یک نیم گروه آبلی است.

برهان. نگاشت $\varphi: H\to H/R$ یک همریختی قوی است. فرض کنیم $x\gamma_n y$ آنگاه

$$\exists (x_1,x_2,\dots,z_n)\in H^n,\exists\sigma\in S_n:$$

$$x\in\prod_{i=1}^n z_i,\quad y\in\prod_{i=1}^n z_{\sigma(i).}$$

بنابراین

$$\overline{x}=\varphi(x)=\varphi(\prod_{i=1}^n z_i)=\bigotimes_{i=1}^n\varphi(z_i),$$

$$\varphi(y)=\bigotimes_{i=1}^n\varphi(z_{\sigma(i)}).$$

چون H/R یک گروه آبلی است، پس $\overline x=\gamma,\varphi(x)=\varphi(y)=\overline y$ و در نتیجه xRy. بنابراین هرگاه $x\gamma_n y$ و در نتیجه $\gamma\subseteq R$. از طرف دیگر چون R یک رابطه‌ی هم ارزی است، پس $\gamma^*\subseteq R$.

نتیجه ۳ . ۶ . نیم ابرگروه H جابجایی نامیده می‌شود در صورتی که به ازای هر $(z_1,z_2\in)H^2$ تساوی $z_1z_2=z_2z_1$ برقرار باشد. هرگاه H یک نیم ابرگروه جابجایی باشد آنگاه روابط γ,β هم ارزند.

تعریف ۳ . ۷ . فرض کنیم M زیرمجموعه‌ای ناتهی از نیم ابرگروه H است. M یک $\gamma-$زیرمجموعه‌ی H نامیده می‌شود هرگاه برای هر $n\in N$ و هر $(z_1,z_2,\dots z_n)\in H^n$ و هر $\sigma\in S_n$

$$\prod_{i=1}^n z_i\cap M\ne\phi\Rightarrow\prod_{i=1}^n z_{\sigma(i)}\subseteq M.$$

لم ۳ . ۸ . فرض کنیم M زیرمجموعه‌ای ناتهی از نیم‌ابرگروه H است. دراین صورت شرایط زیر هم ارزند:

الف. $\forall z\in x_1x_2,\forall\omega\in x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}=x_2x_1:\ z\gamma_2\omega\Rightarrow z\gamma^*\omega.$ M یک $\gamma-$ زیر مجموعه‌ی H است.

ب. هرگاه $x\in M$ و $x\gamma y$ آنگاه $y\in M$.

ج. هرگاه $x\in M$ و $x\gamma^* y$ آنگاه $\boldsymbol{y\in M}$.

برهان (Freni 2002).

تعریـــف ۳ . ۹ . فــرض کنـــیم H ابرگـــروه اســـت. بـــه ازای هـــر $(x,y)\in H^{۲}, B, A\in P^*(H)$ تعریف می‌کنیم:

$$a/b := \{x\in H | a\in xb\},\quad A/B := \bigcup_{a\in A, b\in B} a/b$$

$$a/b := \{x\in H | b\in ax\},\quad A/B := \bigcup_{a\in A, b\in B} a/b,$$

تعریـــف ۳ . ۱۰ . فـرض کنـیم H ابرگـروه اسـت. اشـتراک همـه‌ی زیرابرگروه‌های کامـل H شـامل D زیـر ابرگـروه جابجـاگر H نامیـده می‌شود و آن را با D(H) نشان می‌دهند.

نتیجه ۳ . ۱۱ . فرض کنیم H یک ابرگروه است. در این صورت احکـام زیر برقرار است:

الف. D(H) یک زیر ابرگروه کامل از H است.

ب. D(H) در H وارون‌پذیر است.

ج. فرض کنیم$(D_۲)c$ اشتراک همه‌ی زیرابرگروه‌های کامل و شامل$D_۲$ از H است. در این صورت $D(H) = (D_۲)c$.

برهان (Freni.1987).

لم ۳ . ۱۲ . فرض کنیم H یک ابرگروه و $\varphi: H\to H/\gamma^*$ نگاشـت تصویری است. در این صورت $D(H)=\varphi^{-۱}(۱_{H/\gamma^*})$.

برهـان. فـرض کنـیم $a\in D_۲$، آنگـاه $(x,y)\in H^{۲}$ وجـود دارد بـه طوری که

$$a\in xy/yx \Rightarrow \exists u\in xy, \exists v\in yx:$$

از طــرف دیگــر $v\in yx, u\in xy$ پـــس $\gamma^*(u)=\gamma^*(v), u\gamma_۲ v$.

بنابراین H/γ^* یک گروه است و

$$\gamma^*(a)=۱\Rightarrow a\in\varphi^{-۱}(۱_{H/\gamma^*})\Rightarrow$$

$$D_۲\subseteq\varphi^{-۱}(۱_{H/\gamma^*}).$$

بنــابراین γ^* یــک رابطــه‌ی هــم‌ارزی قویــاً روی H اســت و در نتیجــه $\varphi^{-۱}(۱_{H/\gamma^*})$ یک زیرابرگروه کامل H است. بنابراین

$$D(H)=(D_۲)c\subseteq\varphi^{-۱}(۱_{H/\gamma^*}).$$

بعکس، D(H) یک زیرابرگروه کامل H و شـامل D و H/D(H) یـک گروه آبلی است. بنابراین $H/R_{D(H)}\equiv H/D(H)$ و در نتیجه $\gamma^*\subseteq R_{D(H)}$. فرض کنیم $e\in D(H)$در این صورت به ازای هر

$$x\in\varphi^{-۱}(۱_{H/\gamma^*})$$

$$\varphi(e)=۱_{H/\lambda^*}=\varphi(x)\Rightarrow e\gamma^* x\Rightarrow xR_{D(H)}e.$$

از طرف دیگر $R_{D(H)}(e)=eD(H)$. پس

$$\varphi^{-۱}(۱_{H/\gamma^*})\subseteq D(H).$$

بنابراین $D(H)=\varphi^{-۱}(۱_{H/\gamma^*})$.

نتیجه ۳ . ۱۳ . فرض کنیم H ابرگروه جابجایی است. در ایـن صـورت $D(H)=\omega H$.

برهان. بنابر نتیجه ۳ . ۶ ، روابط γ,β هـم‌ارزنـد پـس حکـم برقـرار است.

قضیه ۳ . ۱۴ . فـرض کنـیم M زیرمجموعـه‌ای نـاتهی از ابرگـروه H است. در این صورت احکام زیر برقرار است:

الف. $\varphi^{-۱}(\varphi(M))=D(H)M=MD(H)$.

ب. هرگـــــاه M γ–زیرمجموعـــــه‌ی H باشـــــد آنگـــــاه $\varphi^{-۱}(\varphi(M))=M$.

برهان. الف. $D(H)=\varphi^{-۱}(۱_{H/\gamma^*})$، بـه ازای هـر $x\in D(H)M$ عضو $(a,b)\in D(H)\times M$وجود دارد به طوری که $x\in ab$ و در نتیجه

$$\varphi(x)=\varphi(a)\otimes\varphi(b)=۱_{H/\gamma^*}\otimes\varphi(b)\Rightarrow$$

$$x\in\varphi^{-۱}(\varphi(b))\subseteq\varphi_{-۱}(\varphi(M))\Rightarrow$$

$$D(H)M\subseteq\varphi^{-۱}(\varphi(M)).$$

بعکس، به ازای هر $b\in Mx\in\varphi^{-۱}(\varphi(M))$ وجـود دارد بـه طـوری کــه $\varphi(x)=\varphi(b)$.چــون H ابرگــروه و $bH=H$اســت، آنگــاه $a\in H$ وجود دارد به طوری که

$$x\in ab\Rightarrow\varphi(b)=\varphi(x)=\varphi(a)\otimes\varphi(b)$$

$$a\in\varphi^{-۱}(۱_{H/\gamma^*})=D(H)\Rightarrow x\in ab\subseteq D(H)M$$

$$\Rightarrow\varphi^{-۱}(\varphi(M))\subseteq D(H)M.$$

به طریق مشابه دیده می‌شود که $\varphi^{-۱}(\varphi(M))=MD(H)$.

قضیه ۳ . ۱۵. فرض کنیم H یک ابرگروه است. در این صورت γ یک رابطه‌ی متعدی روی H است.

برهان (Freni 2002).

۴- ابرگروه‌های n– کامل و n^*– کامل

ابرگروه‌های n– کامل را ماگلیورتو تعریف کرد. کوزکاس و دیـسالو ایـن مبحث را گسترش دادند. جهت کـسب اطلاعـات بیـشتر مـی‌تـوان بـه مراجع شماره ۹ و ۱۵ مراجعه کرد.

نمادگذاری ۴ . ۱. فرض کنیم R رابطه‌ی روی مجموعه‌ی A است. در

این صورت به ازای هر $S \in P^*(A)$ داریم $R(S) := \bigcup_{x\in S} R(x)$.

تعریف ۴ . ۲ . فرض کنیم H یک نیم ابرگروه است. به ازای هر $n \geq 2$ H نیم ابرگروه n− کامل نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in H^n$ داشته باشیم

$$\prod_{i=1}^{n} z_i = \beta\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right).$$

قضیه ۴ . ۳ . ابرگروه H یک ابرگروه n− کامل است اگر و تنها اگر برای هر $(z_1, z_2, \ldots z_n) \in H^n$ و برای هر $x \in \prod_{i=1}^{n} z_i$، تساوی $\beta(x) = \prod_{i=1}^{n} z_i$ برقرار باشد.

برهان (Koskas. 1992).

الف. $\beta_n \subseteq \beta_{n+1}$.

ب. $\beta^*{}_n \subseteq \beta^*{}_{n+1}$.

برهان. به مرجع شماره ۷ مراجعه شود.

قضیه ۴ . ۵ . هرگاه H یک ابرگروه n− کامل باشد آنگاه $\beta^* = \beta_n$.

برهان. (Koskas 1992)

قضیه ۴. ۵. در حالت کلی برای نیم ابرگروه‌ها برقرار نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴ . ۶. مجموعه‌ی $H = \{a,b,c,d\}$ را با ابرعمل $\circ$ در نظر می‌گیریم.

$\circ$	***a***	***b***	***c***	***d***
a	a,b,c	a,b	a,c	a,c
b	a,b	a,b,c	b,c	b,c
c	a,c	b,c	a,b,c	a,b,c
d	a,c	b,c	a,b,c	a,b,c

در این صورت H یک نیم ابرگروه است و به ازای هر $(x,y,z) \in H^3$ تساوی $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = \{a,b,c\}$ برقرار است. بنابراین H یک نیم ابرگروه ۳- کامل است و $d\beta d$ اما $d\beta_3 d$ برقرار نیست.

تعریف ۴ . ۷ . ابرگروه H را کامل گوییم در صورتی که به ازای هر $(x,y) \in H^2$ داشته باشیم $C(x \circ y) = x \circ y$.

قضیه ۴ . ۸ . ابرگروه H کامل است اگر و تنها اگر به ازای هر $(x,y) \in H^2, a \in x \circ y$ تساوی $C(a) = x \circ y$ باشد.

برهان. (Corsini.2003)

تعریف ۴ . ۹ . فرض کنیم $x \in H$ $x' \in H$ وارون راست x در H نامیده می‌شود در صورتی که عضو همانی راست $e \in H$ وجود داشته باشد به طوری که $e \in x \circ x'$. به طریق مشابه، وارون چپ را می‌توان تعریف کرد. x' وارون x نامیده می‌شود در صورتی که عضو همانی f وجود داشته باشد به طوری که $f \in x \circ x' \cap x' \circ x$.

تعریف ۴ . ۱۱. ابرگروه منظم H برگشت‌پذیر نامیده می‌شود در صورتی که به ازای هر $(x,y,z) \in H^3$ در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{cases} (1) \quad y \in a \circ x \Rightarrow \exists a' \in i(x) : x \in a' \circ y \\ (2) \quad y \in x \circ a \Rightarrow \exists a'' \in i(a) : x \in y \circ a''. \end{cases}$$

قضیه ۴ . ۱۲. فرض کنیم H یک ابرگروه کامل است. در این صورت احکام زیر برقراراند:

الف. ω_H مجموعه اعضای همانی H است.

ب. H منظم و برگشت‌پذیر است.

برهان. (Koskas. 1992)

قضیه ۴ . ۱۳. هرگاه $\beta^*{}_n = \beta^*{}_{n+1}$ آنگاه $\beta^*{}_{n+1} = \beta^*{}_{n+2}$.

برهان. (Desalvoo.1980)

نتیجه ۴ . ۱۴. فرض کنیم به ازای $n \in N$ $\beta_n^* = \beta_{n+1}^*$ در این صورت $\beta = \beta_n^*$.

برهان. بنابر قضیه قبل،

$$\beta_1^* \subseteq \beta_2^* \ldots \beta_n^* = \beta_{n+1}^* = \ldots.$$

از طرف دیگر

$$\beta = \bigcup_{t\in N} \beta_t \subseteq \bigcup_{t\in N} \beta_t = \beta_n^*.$$

پس $\beta \subseteq \beta_n^*$, $\beta_n^* = \beta$ قراردادن ۴ .۱۵ $\beta_\circ^* = \phi$

تعریف ۴ . ۱۶ فرض کنیم H یک ابر گروه است . هرگاه $n \in N$ وجود داشته باشد به طوری که $\beta_\circ^* = \beta$ و $\beta_n^* \neq \beta_{n-1}^*$, $\beta_n^* = \beta$ آنگاه ابر گروه n^* − کامل نامیده می شود . نتیجه ۴ . ۱۷ . ابر گروه H ابر گروه n^* − کامل است اگر و تنها اگر $\beta_n^* \neq \beta_{n-1}^*$, $\beta_{n+1} \in \beta_n^*$.

قضیه ۴. ۱۸. ابر گروه H گروه است اگر و تنها اگر H ابر گروه 1^*− کامل باشد.

برهان. فرض کنیم H یک گروه است . در این صورت به ازای هر

$(z_1,z_2)\in H^2$ ، $|z_1 z_2|=1$ ثابت می کنیم $\beta_2\subseteq\beta_1^*$. چون $\beta_1^*=\beta_1$ ، پس کافی است که نشان دهیم $\beta_2\subseteq\beta_1$. فرض کنیم $x\beta_2 y$ ، در این صورت $(z_1,z_2)\in H^2$ وجود دارد به طوری که

$$\{x,y\}\subseteq z_1z_2\Rightarrow x\beta_1 y.$$

بعکس، فرض کنیم H یک ابر گروه 1^*– کامل است که ثابت کنیم هر عضو H یک اسکالر است . برای $(x,y)\in H^2$ ، اعضای $(z_1,z_2)\in H^2$ ، اعضای $(z_1,z_2)\in H^2$ وجود دارد به طوری که

$\{x,y\}\subseteq z_1z_2 \Rightarrow x\beta_2 y \Rightarrow x\beta_1 y \Rightarrow x=y.$ بنابرا
ین هر عضو H یک اسکالر است و در نتیجه H یک گروه است .

قضیه ۴ . ۱۹. فرض کنیم H یک ابر گروه n – کامل است .در این صورت $m\le n$ وجود دارد به طوری که H ابر گروه m^* – کامل باشد.

برهان. بنابر قضیه ۴ .۱۳ و نتیجه ۴ .۱۴ ، $\beta^*=\beta=\beta_n$ در نتیجه $m\le n$ وجود دارد که $\beta_m^*=\beta$ و $\beta_{m-1}^*\neq\beta$.

ابر گروه های γ_n – کامل و γ_n^* – کامل

در این بخش ، ضرب جایگشت ها از چپ در نظر گرفته می شود. بنابراین $(1234)=(34)(123)$. به علاوه $n\ge 2$ در نظر گرفته می شود.

تعریف ۱.۵ . ابر گروه H γ_n – کامل نامیده می شود در صورتی که به ازای هر $(z_1,z_2,\dots,z_n)\in H^n$ و هر $\sigma\in S_n$ تساوی $\gamma(\prod_{i=1}^n z_{\sigma(i)})=\prod_{i=1}^n z_i$ برقرار باشد .

نتیجه ۲.۵ . فرض کنیم H یک ابر گروه جابجایی است . در این صورت H یک ابر گروه γ_n – کامل است اگر و تنها اگر H یک ابر گروه n – کامل باشد .

قضیه ۳.۵ . ابر گروه H ، γ_n – کامل است و تنها اگر به ازای هر $x\in\prod_{i=1}^n z_{\sigma}(i)$ ، $\sigma\in S_n$ داشته باشیم $\gamma(x)=\prod_{i=1}^n z_i$.

برهان. فرض کنیم H یک ابر گروه γ_n – کامل است . در این صورت به ازای هر $\sigma\in S_n$ و $\sigma\in S_n$ ، $x\in\prod_{i=1}^n z_{\sigma(i)}$ داریم :

$$\gamma(x)\subseteq\bigcup_{x\in\prod_{i=1}^n z_{\sigma(i)}}\gamma(x)=\prod_{i=1}^n z_i\Rightarrow\gamma(x)\subseteq\prod_{i=1}^n z_i.$$

فرض کنیم $y\in\prod_{i=1}^n z_i$ ، در این صورت

$$x\gamma_n y\Rightarrow y\in\gamma(x)\Rightarrow\prod_{i=1}^n z_i\subseteq\gamma(x).$$

بنابراین $\gamma(x)=\prod_{i=1}^n z_i$.

بعکس ، به ازای هر

$$x\in\prod_{i=1}^n z_{\sigma(i)},(z_1,z_2,\dots,z_n)\in H^n,\sigma\in S_n$$

داریم:

$$\gamma(x)=\prod_{i=1}^n z_i\Rightarrow\gamma(\prod_{i=1}^n z_{\sigma(i)})=\bigcup_{x\in\prod_{i=1}^n z_{\sigma(i)}}\gamma(x)=\prod_{i=1}^n z_i.$$

بنابراین H یک ابر گروه γ_n – کامل است.

لم ۴.۵ . فرض کنیم H یک ابر گروه است . در این صورت به ازای هر $n\ge1$ احکام زیر برقرار اند :

الف . $\gamma_n\subseteq\gamma_{n+1}$.

ب . $\gamma_n^*\subseteq\gamma_{n+1}^*$.

برهان. الف . بنابر تعریف به ازای هر $(x,y)\in H^2$ داریم :

$$x\gamma_n y\Rightarrow\exists(z_1,z_2,\dots,z_n)\in H^n,\ \exists\sigma\in S_n$$
$$:\ x\in\prod_{i=1}^n z_i,\ y\in\prod_{i=1}^n z_{\sigma(i)}.$$

چون H یک ابر گروه است ، پس $(t_1,t_2)\in H^2$ وجود دارد به طوری که $z_n\in t_1\circ t_2$. اگر به ازای هر $1\le i\le n-1$ داشته باشیم $z'_n:=t_1, z'_{n+1}:=t_2, z'_i:=z_i$ آنگاه $x\in z'_1\circ z'_2\cdots\circ z'_n\circ z'_{n+1}$ اگر $\sigma'=(n\ \ n+1)\sigma$ آنگاه $\sigma'\in S_{n+1}$ ، $y\in\prod_{i=1}^n z_{\sigma'(n)}$ ، $\gamma_n\subseteq\gamma_{n+1}$.

ب . بنابر قسمت قبل ، حکم برقرار است.

قضیه ۵.۵ . هرگاه H یک ابر گروه γ_n – کامل باشد آنگاه $\gamma^*=\gamma_n$.

برهان. داریم $\gamma^*=\gamma$ پس کافی است که ثابت کنیم $\gamma\subseteq\gamma_n$. فرض کنیم $x\gamma_n y$. فرض کنیم $n<m$ ، در این صورت $(z_1,\dots,z_m)\in H^m$ و $\sigma\in S_m$ وجود دارد به طوری که $x\in\prod_{i=1}^m z_i$ و $y\in\prod_{i=1}^m z_\sigma(i)$. بنابراین $t_1\in H$ وجود دارد که $x\in\prod_{i=1}^{n-1}z_i\circ t_1$ هرگاه به ازای هر $1\le i\le n-1$ ، $u_i:z_1$

و $= t_1 : u_n$ آنگاه $x\in\prod_{i=1}^n u_i$. از طرف دیگر

$$y=\gamma(x)\subseteq\gamma(\prod_{i=1}^n u_i)=\prod_{i=1}^n u_i \Rightarrow y\in\prod_{i=1}^n u_i$$

بنابراین به ازای $\sigma=1$، $x\gamma_n y$ و در نتیجه $\gamma^*=\gamma_n$.

قضیه ۵.۵ . در حالت کلی برای نیم ابر گروه‌ها برقرار نیست . به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۶.۵. مجموعه ی $H=\{a,b,c,d\}$ را با ابر عمل $\circ$ در نظر می گیریم.

$\circ$	*a*	*b*	*c*	*d*
a	a,b,c	a,b	a,c	a,c
b	a,b	a,b,c	b,c	b,c
c	a,c	b,c	a,b,c	a,b,c
d	a,c	b,c	a,b,c	a,b,c

در این صورت H یک نیم ابر گروه است . به ازای هر $(x,y,z)\in H^3$ داریم $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)=\{a,b,c\}$ بنابراین H یک نیم ابر گروه γ_3- کامل است و $d\gamma^* d$ اما $d\gamma_3 d$ برقرار نیست.

قضیه ۷.۵. فرض کنیم H ابر گروه γ_n- کامل است. در این صورت به ازای هر $(z_1,z_2,\dots,z_n)\in H^n$ مجموعه ی $\prod_{i=1}^n z_i$ یک $\gamma-$ زیر مجموعه ی H است.

برهان. فرض‌کنیم به ازای هر $(y_1,y_2,\dots,y_m)\in H^m$ داشته باشیم $\prod_{i=1}^m y_i\cap\prod_{i=1}^n z_i\neq\phi$. در این صورت $\alpha\in\prod_{i=1}^m y_i\cap\prod_{i=1}^n z_i$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $\sigma'\in S_m$ و $y\in\prod_{i=1}^m y_{\sigma'(i)}$، داریم $a\gamma_m y$ و $y\in\gamma(a)$. پس

$$a\in\gamma(a)=\prod_{i=1}^n z_i \Rightarrow \prod_{i=1}^m y_{\sigma'(i)}\subseteq\prod_{i=1}^n z_i .$$

بنابراین $\prod_{i=1}^n z_i$ یک $\gamma-$ زیر مجموعه ی H است.

نتیجه ۸.۵. هرگاه H یک ابر گروه γ_2- کامل باشد آنگاه H یک ابر گروه کامل است.

برهان. بنابر تعریف ، ابر گروه H کامل است در صورتی که به ازای هر $(x,y)\in H^2$، مجموعه‌ی $x\circ y$ یک زیر مجموعه ی کامل H باشد. چون $x\circ y$ یک $\gamma-$ زیر مجموعه ی H است، هرگاه A یک $\gamma-$ زیر مجموعه ی H باشد آنگاه A یک زیر مجموعه ی کامل است . بنابراین $x\circ y$ یک زیر مجموعه ی کامل H است.

نتیجه ۹.۵. فرض کنیم H یک ابر گروه γ_2- کامل است . در این صورت احکام زیر برقرار است:

الف . w_H مجموعه اعضای همانی H است.

ب . H منظم و برگشت پذیر است.

برهان. بنابر نتیجه قبل ، حکم برقرار است.

بنابر مطالب این بخش، ابر گروه های γ_n- کامل باشد آنگاه بنابر تعریف ، H یک ابر گروه $n-$ کامل است . عکس این موضوع فقط برای ابرگروه های جابجایی برقرار است . بنابراین تعریف ابر گروه γ_n- کامل ، کلی تر از تعریف ابر گروه $n-$ کامل است.

قضیه ۱۰.۵ . هرگاه P یک $\gamma-$ زیر مجموعه‌ی H باشد آنگاه $K(P)$ یک $\gamma-$ زیر مجموعه K_H است.

برهان. فرض کنیم $(z_1,z_2,\dots z_m)\in K_H^m$ و $*\prod_{i=1}^m z_i\cap K(P)\neq\phi$ آنگاه $u\in *\prod_{i=1}^m z_i\cap K(P)\neq\phi$ و $(x_1,x_2,\dots x_m)\in K^m$ وجود دارد به طوری‌که :

$$\forall 1\le i\le m: z_i\in A(x_i)\Rightarrow \bigcup_{y\in\circ\prod_{i=1}^m x_i} A(y)$$

$$\Rightarrow \exists y_1\in\circ\prod_{i=1}^m x_i : u\in A(y_1).$$

اما $u\in K(P)$ ، بنابراین $y_2\in P$ وجود دارد به طوری که $u\in A(y_2)$. بنابراین :

$$y_1=y_2\in\circ\prod_{i=1}^m x_i\cap P \Rightarrow \forall\sigma\in S_m:\ \circ\prod_{i=1}^m x_{\sigma(i)}\subseteq P.$$

از طرف دیگر، به ازای هر $\sigma\in S_m$ و $v\in *\prod_{i=1}^m z_{\sigma(i)}$،

$$v\in *\prod_{i=1}^m z_{\sigma(i)}=\bigcup_{y\in\circ\prod_{i=1}^m x_{\sigma(i)}} A(y)$$

$$\Rightarrow \exists w\in\circ\prod_{i=1}^m x_{\sigma(i)} : v\in A(w).$$

بنابر فرض P یک $\gamma-$ زیر مجموعه H است ، پس :

$$\circ\prod_{i=1}^m x_{\sigma(i)}\subseteq P \Rightarrow A(w)\subseteq K(P)$$

$$\Rightarrow v\in K(P) \Rightarrow *\prod_{i=1}^m z_{\sigma(i)}\subseteq K(P)$$

بنابراین $K(P)$ یک $\gamma-$ زیر مجموعه H است.

قضیه ۵. ۱۱. به ازای هر $(x,y)\in H^2$ و $(u,v)\in A(x)\times A(y)$، اگر $u\gamma_{KH} v$ در این صورت:

$$u\in \bigcup_{w\in \circ\prod_{i=1}^m x_i} A(w),\quad v\in \bigcup_{w'\in\circ\prod_{i=1}^m x_{\sigma(i)}} A(w').$$

بنابراین $\exists w_1\in \circ\prod_{i=1}^m x_i,\ \exists w_2\in\circ\prod_{i=1}^m x_{\sigma(i)}: u\in A(w_1), v\in A(w_2)$.
بنابراین $w_1\gamma_H w_2$، $w_1=x$، $w_2=y$ در نتیجه $x\gamma_H y$.

قضیه ۵. ۱۲ به ازای هر $(x,y)\in H^2$، $x\gamma_H y$ اگر و تنها اگر $A(x)\overline{\overline{\gamma}}_{KH} A(y)$.

برهان. فرض کنیم $x\gamma_H y$، در این صورت

$$\exists m\in N, \exists\sigma\in S_m\ \exists(a_1,a_2,\dots,a_m)\in H^m:$$

$$x\in\circ\prod_{i=1}^m a_i,\quad y\in\circ\prod_{i=1}^m a_{\sigma(i)}.$$

اما به ازای هر $(b_1,b_2,\dots b_m)\in A(a_1)\times A(a_2)\dots\times A(a_m)$ داریم:

$$*\prod_{i=1}^m b_i=\bigcup_{v\in\circ\prod_{i=1}^m a_i} A(v),\quad *\prod_{i=1}^m b_{\sigma(i)}=\bigcup_{w\in\circ\prod_{i=1}^m a_{\sigma(i)}}A(w)$$

بنابراین:

بعکس، فرض کنیم $A(x)\overline{\overline{\gamma}}_{KH}A(y)$، در این صورت بنابر قضیه قبل، $x\gamma_H y$.

قضیه ۵. ۱۳. به ازای هر $(x,y)\in H^2$ و $(u,v)\in A(x)\times A(y)$ شرایط زیر هم ارزند:

الف. $u(\gamma_n)_{KH} v$.

ب. $x(\gamma_n)_{KH} y$.

ج. $A(x)\overline{\overline{(\gamma_n)}}_{KH}A(y)$.

برهان. الف ⇐ ب. فرض کنیم $u(\gamma_n^*)_{KH} v$ در این صورت

$$\exists m\in N,\exists(x_0,x_1,\dots,x_m)\in K_H^{m+1}:$$

$$u=x_0(\gamma_n)_{KH}x_1\dots x_{m-1}(\gamma_n)_{KH}x_m=v$$

به ازای هر $0\le j<m-1$، $(z_1^j,z_2^j,\dots,z_n^j)K_H^n$ و $\sigma^j\in S_n$ وجود دارد به طوری که $x_j\in *\prod_{i=1}^n z_i^j$ و $x_{j+1}\in*\prod_{i=1}^n z^j_{\sigma^i(i)}$. بنابراین به ازای هر $1\le i\le n$ و $0\le j<m-1$، $y_i^j\in H$ وجود دارد به طوری که $x_i\in A(y_i^j)$. بنابراین

$$x_j\in\bigcup_{w\in\circ\prod_{i=1}^n y_i^j}A(w),\quad x_{j+1}\in\bigcup_{w'\in\circ\prod_{i=1}^n y^j_{\sigma^i(i)}}A(w')$$

پس

$$\exists w_j\in\circ\prod_{i=1}^n y_i^j,\ \exists w_{j+1}\in\circ\prod_{i=1}^n y^j_{\sigma^i(i)}:$$

$$x_j\in A(w_j), x_{j+1}\in A(w_{j+1}).$$

بنابراین $w_0=x$، $w_m=y$ و $w_0(\gamma_n)_H w_1\dots w_{m-1}(\gamma_n)_H w_m$ و $x(\gamma_n^*)_H y$، در این صورت

$$\exists m\in N,\exists(x_0,x_1,\dots,x_m)\in H^{m+1}:$$

$$x=x_0(\gamma_n)_H x_1\dots x_{m-1}(\gamma_n)_H x_m=y$$

به ازای هر $0\le j<m-1$، $(z_1^j,z_2^j,\dots,z_n^j)\in H^n$ و $\sigma^j\in S_n$ وجود دارد به طوری که $x_j\in\circ\prod_{i=1}^n z_i^j$ و $x_{j+1}\in\circ\prod_{i=1}^n z^j_{\sigma^j(i)}$.
بنابراین به ازای هر $y_i^j\in A(z_i^j)$ داریم:

$$*\prod_{i=1}^n y_i^j=\bigcup_{w\in\circ\prod_{i=1}^n z_i^j}A(w),\quad *\prod_{i=1}^n y^j_{\sigma^j(i)}=\bigcup_{w'\in\circ\prod_{i=1}^n z^j_{\sigma^j(i)}}A(w')$$

اما به ازای هر $1\le i<m$، $w_j\in H$ وجود دارد به طوری که $x_j\in A(w_j)$. بنابراین $A(w_j)\subseteq*\prod_{i=1}^n y_i^j$ و $A(w_{j+1})\subseteq*\prod_{i=1}^n y^i_{\sigma(i)}$. پس $A(w_0)\overline{\overline{(\gamma_n)_{K_H}}}A(w_1)\dots A(w_{m-1})\overline{\overline{(\gamma_n)_{K_H}}}A(w_m)$ از طرف دیگر $x=w_0$ و $y=w_m$ و در نتیجه $A(x)\overline{\overline{(\gamma_n^*)}}_{K_H}A(y)$.

ج ⇐ الف. بنابر نمادگذاری ۲. ۲۰، حکم برقرار است.

قضیه ۵. ۱۵. فرض کنیم H یک ابر گروه است به ازای هر $n\ge2$ احکام زیر برقراراند:

الف. $(\gamma_n)_H=\gamma_H$ اگر و تنها اگر $(\gamma_n)_H=\gamma_{K_H}$.

ب. $(\gamma_n^*)_{KH}=\gamma^*_{K_H}$.

برهان. الف. فرض کنیم $(\gamma_n)_H=\gamma_H$، کافی است که نشان دهیم $\gamma_{KH}\subseteq(\gamma_n)_{KH}$ فرض کنیم $u\gamma_{KH}v$، در این صورت $(x,y)\in H^2$ وجود دارد به طوری که $u\in A(x)$ و $v\in A(y)$. پس $x\gamma Hy$ و در نتیجه $x(\gamma_n)_{KH}y$ و $u(\gamma_n)_{KH}v$.
بعکس، فرض کنیم $(\gamma_n)_{KH}=\gamma_{KH}$، کافی است که نشان دهیم $\gamma_{KH}\subseteq(\gamma_n)_H$ فرض کنیم $x\gamma y$، در این صورت $A(x)\overline{\overline{(\gamma)}}K_H A(y)$. بنابر فرض، $A(x)(\gamma_n)_{KH}A(y)$ و در نتیجه $x(\gamma_n)_H y$.

ب. بنابر تعریف و مشابه قسمت الف، حکم برقرار است.

لم ۵. ۱۶. به ازای هر $(a,b,x)\in H^3$ احکام زیر برقرارند :

الف. هرگاه $a\,\gamma b$ آنگاه $a\circ x\,\overline{\overline{\gamma_{n+1}}}\,b\circ x$.

ب. هرگاه $a\,\gamma b$ آنگاه $x\circ a\,\overline{\overline{\gamma_{n+1}}}\,x\circ b$.

برهـــان. فـرض کنـیم $a\,\gamma b$ ، در ایــن صــورت عــضوهای $(z_1,z_2,\dots z_n)\in H^n$ و $\sigma\in S_n$ وجـود دارنـد بـه طـوری کـه $a\in\prod_{i=1}^{n} z_i$, $b\in\prod_{i=z_{\sigma(i)}}^{n}$ از طـــــــــرف دیگــــــــر $a\circ x\subseteq(\prod_{i=1}^{n} z_i)\circ x$ و $b\circ x\subseteq(\prod_{i=1}^{n} z_{\sigma(i)})\circ x$. هرگاه به ازای هر $1\le i\le n$ ، قرار دهیم $u_i:=z_i$ ، $\sigma'(i):=\sigma(i)$ $\sigma'(n+1):=n+1$ آنگــــــــاه $a\circ x\subseteq\prod_{i=1}^{n+1}u_i$ و $b\circ x\subseteq\prod_{i=1}^{n+1}u_{\sigma'(i)}$. بنــــــــابراین $a\circ x\,\overline{\overline{\gamma_{n+1}}}\,b\circ x$.

ب. به طریق مشابه برقرار است.

لم. ۵ . ۱۷ . به ازای هر $(a,b,x)\in H^3$ احکام زیر برقرار اند :

الف. هرگاه $a\,\gamma^* b$ آنگاه $a\circ x\,\overline{\overline{\gamma^*_{n+1}}}\,b\circ x$.

ب . هرگاه $a\,\gamma^* b$ آنگاه $x\circ a\,\overline{\overline{\gamma^*_{n+1}}}\,x\circ b$.

برهــان . الــف . فــرض کنــیم $a\,\gamma^* b$ در ایــن صــورت اعــضای $(z_1,\dots,z_m)\in H^m$ وجــــود دارنــــد بــــه طــــوری کــــه $a=z_1\beta_n z_2\dots z_{m-1}\gamma_n z_m=b$ با استفاده از لم قبل ، $a\circ x=z_1\circ x\gamma_{n+1}z_2\circ x\dots z_{m-1}\circ x\gamma_{n+1}z_m\circ x=b\circ x$ بـه عبارت دیگر $a\circ x\gamma^*_{n+1}b\circ x$.

ب . به طریق مشابه ، حکم برقرار است.

قرارداد ۵ .۱۸ . $\gamma^*_{\circ}=\phi$.

تعریف ۵. ۱۹. فـرض کنـیم H یـک ابـر گـروه و n کـوچکترین عـدد طبیعی است به طوری که $\gamma^*_n=\gamma$ و $\gamma^*_n\neq\gamma^*_{n-1}$ در این صورت ابـر گروه H یک ابر گروه γ^*_n- کامل نامیده می شود.

نتیجه ۵ .۲۰ . فرض کنیم H یک ابر گروه جابجایی است . H یک ابـر گروه γ^*_n-ت اگر و تنها اگر H یک ابر گروه n^*-کامل باشد .

قضیه ۵ .۲۱ . ابر گروه H یک گروه آبلی است اگر و تنها اگر H یک ابر گروه γ^*_1- کامل باشد.

برهــان . فـرض کنـیم H یـک گـروه آبلـی اسـت و $(x,y)\in H^2$ و $x\gamma_n y$ در این صورت $(z_1,z_2,\dots z_n)\in H^n$ و $\sigma\in S_n$ وجـود دارد به طوری که $x=\prod_{i=1}^{n} z_i$ و $y=\prod_{i=1}^{n} z_{\sigma(i)}$ و در نتیجـه $x=\prod_{i=1}^{n} z_i=\prod_{i=1}^{n} z_{\sigma(i)}=y$ و $x\gamma_1 y$ و $\gamma=\gamma^*_1$.

بعکس، فرض کنـیم H یـک ابـر گـروه γ^*_1- کامـل اسـت . بـه ازای هر$n\ge 2$ ، $\gamma^*_1=\gamma$ و $\gamma_n\subseteq\gamma_1$ فرض کنـیم $(z_1,\dots,z_m)\in H^n$ و $\sigma\in S_n$. هرگاه $x\in\prod_{i=1}^{n} z_i$ و $y\in\prod_{i=1}^{n} z_{\sigma(i)}$ آنگاه

$$x\gamma_n y\Rightarrow x\gamma_1 y\Rightarrow x=y\Rightarrow\prod_{i=1}^{n} z_i=\prod_{i=1}^{n} z_{\sigma(i)}.$$

بنابراین H یک ابر گروه جابجایی است و براساس نتیجه قبل ، H یـک ابر گروه 1^*- کامل و در نتیجه H یک گروه آبلی است .

نتیجه ۵ .۲۲ . H یک ابـر گـروه γ^*_n- کامـل اسـت اگـر و تنهـا اگـر H/γ^*_n یک گروه آبلی باشد.

قضیه ۵. ۲۳. هر ابر گروه متناهی یک ابر گروه γ^*_n- کامل است .

برهان . اگر ابر گروه H متناهی باشـد آنگـاه زنجیـر $\gamma^*_1\subseteq\gamma^*_2\subseteq\dots$ ایــستا اســت و $n\in N$ وجــود دارد بــه طــوری کــه $\gamma^*_n=\gamma$ و $\gamma^*_{n-1}\neq\gamma^*_n$.

قضیه۵ .۲۴. فرض کنیم H یک ابر گروه γ_n- کامل است . در ایـن صورت $m\le n$ وجود دارد به طوری که H یک ابر گروه γ^*_m- کامل است.

برهان. داریم $\gamma^*=\gamma=\gamma_n$ ، پس $m\le n$ وجود دارد به طوری که $\gamma^*_m=\gamma$ و $\gamma^*_{m-1}\neq\gamma$.

قضیه ۵. ۲۵. به ازای هر $(v,m)\in w_H^2$ احکام زیر برقرار اند :

الف . هرگاه $v\gamma_n w$ آنگاه $\gamma=\gamma_{n+1}$.

ب . هرگاه $v\gamma^*_n w$ آنگاه $\gamma=\gamma^*_{n+1}$.

برهــان. الـف . داریـم $w_H\circ H=H\circ w_H=H$ هرگـاه $x\gamma y$ آنگاه $(v,w)\in w_H^2$ وجـود دارد کـه $y\in x\circ v$ و $x\in x\circ w$. بـا اســـتفاده از فـــرض $v\gamma_n w$ و $x\circ v\overline{\overline{\gamma_{n+1}}}x\circ w$ و $x\gamma_{n+1}y$ و در نتیجه $\gamma\subseteq\gamma_{n+1}$. از طرف دیگر نیز به طریـق مـشابه برقـرار اسـت و $\gamma=\gamma^*_{n+1}$.

ب . مشابه قسمت قبل، حکم برقرار است.

قضیه ۵. ۲۶. فرض کنیم H یک ابر گروه است و به ازای هر $(v,w)\in w_H^2$ ، $v\gamma_n^* w$. هرگاه به ازای $(v',w')\in w_H^2$ داشته باشیم $v'\notin \gamma_{n-1}^*(w')$ آنگاه H یک ابر گروه γ_n^* – کامل یا γ_{n+1}^* – کامل است.

مثال ۵. ۲۷. الف. ابر گروه $(H,\circ)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

∘	***a***	***b***	***c***
a	a	b	c
b	b	a,b	c
c	c	c	a,b

در این صورت $w_H=\{a,b\}$. بنابراین به ازای هر $(v,w)\in w_H^2$ ، $v\gamma_n^* w$ و $a\notin\gamma_1^*(b)$. پس H به ازای $n=2$ در شرایط قضیه قبل، صدق می کند. از طرف دیگر $\gamma^*=\gamma=\gamma_2^*$. بنابراین H یک ابر گروه γ_2^* – کامل است.

ب. ابر گروه $(K,*)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

*	***a***	***b***	***c***	***d***
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a,b	a,b
d	d	c	a,b	a,b

در این صورت $w_K=\{a,b\}$. بنابراین به ازای هر $(v,w)\in w_H^2$ ، $v\gamma_n^* w$ و $a\notin\gamma_1^*(b)$ پس ابر گروه K به ازای $n=2$ در شرایط قضیه قبل، صدق می‌کند. از طرف دیگر $c\gamma_2 d$ برقرار نیست. بنابراین K یک ابر گروه γ_3^* – کامل است.

منابع:

Davvaz B.A. 2002: Brief Survey of The Theory of H_v – Structure , Proc. 8 th International Congress of Algebraic Hyperstructure and Application, 1-9 Sep, Samothraki, Greec, Spanidis Press, (2003) 39-70 Prentice Hall, 1990

Freni D.A. 2002: New Characterization of Derived Hypergroup Via Strongly Regular Equivalences, Com-munication in Algebra, **30(8)**: 3977–3989.

Freni D. 1987: Sur les Hypergroupes de Type U Et Sous-Hypergroupes de Type U, *Riv. Mat. Univ. Parma*, **4:** 29-41.

FreniD. 1991: Une Note Sur le Coer D'Un Hypergroupe Et Sur la Cloture Transitive β^* de β, Riv. Di Mat. Pura, Appl, **8:** 153–156

Marty F. (1970): Sur uni generalizayion de la notion the groupe, *8iem conrres Math. Scandinaves*, Stockkolm, 45–49.

Desalvo M. 1982: K_H-ipergruppi, Atti Sem. Mat Fis. Univ Modena, 31.

Desalvo M., G. Lo Faro 1999: On the n^*-Complete Hypergroups, Discrete Mathematics, 208/209 (1999) 177–188.

Koskas M. 1963: Groupides Demi-hypergroupes, C.R. Acad Sc. Paris, 256.

Koskas M. 1970: Groupoides Demi-hypergroupes et hypergroupes, J. Math. Pures et Apple, 49 155–192.

Darafsheh M., Davvaz B. 1999: H_v ring of fractions, Italian, *J. Pure Apple. Math*, **5:** 25-34.

Corsini P. 1974: Homomorphism d' hypergroupes, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 52.

Corsini P., Leoreanu V. 2003: Applications of Hyperstucture Theory, Advanced in Mathematics, Kluwer Academic Publishers.

Corsini,P. Ferni D. (1992) On the Heart of Hypergroups, Mathematica Montisnigri, 2: 1993.

Corsini P. 1993: Prolegomena of Hypergroup Theory, Second edition, Aviani editor.

Migliorato R. 1986: Semi-ipergruppi n-complete, Ann. Sci. Unvi. Clermont II, *Ser Math*, **23:** 99-123.

Vougiouklis T. 1994: Hyperstrucyures and their representations , Hadronic Press. Inc, 115, Palm Harber, USA.